





ANNALI

DI

SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE

1857

ANNALI
DI SCIENZE
MATEMATICHE E FISICHE

COMPILATI

DA

BARNABA TORTOLINI

Professore di Calcolo Sublime, e Membro del Collegio Filosofico
all'Università Romana, Professore di Fisica Matematica
nel Collegio Urbano e nel Pontificio Seminario Romano,
Socio ordinario della Pontificia Accademia de'Nuovi Lincei,
Uno de'Quaranta della Società Italiana delle Scienze
residente in Modena,
Socio corrispondente dell' Accademia Reale delle Scienze di Upsal,
dell'Accademia Reale di Torino, dell'Istituto di Bologna,
della Reale Accademia delle Scienze,
e della Pontaniana di Napoli e dell'Accademia di Messina

TOMO OTTAVO

ROMA

Tipografia delle Belle Arti

1857

ANNALI
DI SCIENZE
MATEMATICHE E FISICHE

SULLA PARTIZIONE DEI NUMERI

NOTA

DEL SIG. PROF. FRANCESCO BRIOSCHI

1.° Uno dei più importanti problemi nella teoria della partizione dei numeri è il seguente:

Dati i numeri intieri, positivi $a_1, a_2, \ldots a_r$; n determinare il numero delle soluzioni intiere, positive della equazione:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \ldots + a_rx_r = n \,. \tag{1}$$

Indicando con $S_{r,n}$ il numero cercato, è manifesto che il numero delle soluzioni positive, intiere delle equazioni che si ottengono dalla superiore ponendo $x_r = 0, 1, 2 \ldots$ saranno ordinatamente:

$$S_{r-1,n}, \quad S_{r-1,n-a_r}, \quad S_{r-1,n-2a_r} \ldots$$

e che si avrà:

$$S_{r,n} = S_{r-1,n} + S_{r-1,n-a_r} + S_{r-1,n-2a_r} + \ldots$$

ossia:

$$S_{r,n} = S_{r-1,n} + S_{r,n-a_r}; \tag{2}$$

e quindi il numero delle soluzioni richiesto verrà dato dall'integrazione di quest'ultima equazione alle differenze finite.

La integrazione delle equazioni alle differenze finite di questa specie forma lo scopo di una memoria dell'insigne Geometra Pietro Paoli pubblicata nel Volume 2.° degli Atti della Società Italiana; nella quale memoria trovasi applicato il metodo generale all'integrazione di alcune equazioni che hanno origine da varj problemi sulla partizione dei numeri. Nel caso particolare dell'equazione (2) l'Autore giunge ad un risultato che può ridursi al seguente:

Il numero $S_{r,n}$, cioè il numero delle soluzioni positive, intiere della equazione (1) è eguale al coefficiente di x^n nello sviluppo secondo le potenze ascendenti di x della espressione:

$$(3) \qquad \frac{1}{\left(1-x^{a_1}\right)\left(1-x^{a_2}\right)\ldots\left(1-x^{a_r}\right)}$$

2.° Il problema suesposto sulla partizione dei numeri è quindi ridotto a quello di determinare una espressione analitica pel coefficiente di x^n in quello sviluppo, la quale sia facilmente calcolabile nei casi particolari. La soluzione di questo problema pubblicata dal Sig. Sylvester nel Quarterly Journal ed a cui si riferisce la nota del Prof. Tortolini alla pag. 400 fascicolo di Ottobre 1856 di questi Annali; raggiunge a mio credere completamente lo scopo; oltre al costituire per se stessa un interessantissimo risultato analitico.

Indicando con $f(x)$ il denominatore delle espressione (3); sieno x_1, $x_2 \ldots x_m$ le radici semplici o multiple della equazione $f(x)=0$. Avremo nella notazione del calcolo dei residui.

$$\frac{1}{f(x)}=\sum_1^m{}_s\,\mathcal{E}\,\frac{z-x_s}{(x-z)\,f(z)((z-x_s))}$$

e denominando N il coefficiente di x^n nello sviluppo della (3) si avrà :

$$N = -\sum_{1}^{m}{}_{s}\mathcal{E}\frac{z - x_s}{z^{n+1}f(z)((z - x_s))}$$

Posto ora $z = \psi(t)$, ed indicato con t_s il valore di t corrispondente a $z = x_s$, (che supporremo unico), si ha per una formola dovuta al Sig. Cauchy (Exercices de Mathematiques V.^{e} 1^r. pag. 173 (41)) che la espressione superiore si trasforma nella seguente :

$$N = -\sum_{1}^{m}{}_{s}\mathcal{E}\frac{(t - t_s)\,\psi'(t)}{\psi(t)^{n+1}f(\psi(t))((t - t_s))};$$

e supponendo :

$$\psi(t) = x_s e^{-t}$$

si avrà

$$(4) \qquad N = \sum_{1}^{m}{}_{s}\mathcal{E}\frac{(t - t_s)e^{nt}}{x_s^{\,n}f(x_s e^{-t})((t - t_s))}$$

nella quale deve osservarsi essere $t_s = 0$.

Notisi che indicando con y una quantità la quale sostituita in luogo di x non renda $f(x) = 0$ ed indicando con $\theta = 0$ il valore di t dedotto dall'equazione $y = ye^{-t}$ il residuo :

$$\mathcal{E}\frac{(t - \theta)e^{nt}}{y^n f(ye^{-t})((t - \theta))}$$

è eguale a zero, giacchè la funzione

$$\frac{e^{nt}}{y^n f(ye^{-t})}$$

non diventa infinita per $t = \theta = 0$.

3.° Questa nota osservazione è in questo caso particolare della più grande importanza. Infatti se supponiamo che y sia una radice primitiva di una delle equazioni:

$$(5) \qquad y - 1 = 0 \ , \ y^2 - 1 = 0 \ , \ y^3 - 1 = 0 \ . \ . \ .$$

potremo porre:

$$(6) \qquad N = S \, \mathcal{E} \frac{(t - \theta) \, e^{nt}}{y^n f(ye^{-t}) ((t - \theta))}$$

(indicando col simbolo S la somma di tutti i residui che si ottengono ponendo in luogo di y tutte le radici primitive delle equazioni (5)); poichè fra questi residui saranno nulli tutti quelli corrispondenti a valori di y i quali non coincidono con qualcuna delle radici, x_1, $x_2 \ldots x_n$ della equazione $f(x) = 0$; ed inoltre queste radici si troveranno fra le radici primitive delle equazioni (5). Abbiamo quindi il seguente:

Teorema. Indicando con y_1, $y_2 \ldots y_i$ le radici primitive dell'equazione $y^m - 1 = 0$ e con W_m il coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo della espressione:

$$H = \sum_1^i{}_s \frac{y^{-n}{}_s \ e^{nt}}{\left(1 - y_s^{a_1} e^{-a_1 t}\right)\left(1 - y_s^{a_2} e^{-a_2 t}\right) \ldots \left(1 - y_s^{a_r} e^{a_r t}\right)}$$

il numero delle soluzioni positive, intiere della equazione (1) è eguale a:

$$W_1 + W_2 + W_3 \ldots (*)$$

4.° Nel determinare il coefficiente di W_m nei casi particolari converrà distinguere fra i numeri a_1, $a_2 \ldots a_r$ quelli che sono esattamente divisibili per m e quelli che non lo sono. Se con $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\mu$ si indicano i primi, e con $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\nu$ i secondi; essendo $y_s^{\alpha_1} = y_s^{\alpha_2} = \ldots = y_s^{\alpha_\mu} = 1$ si avrà:

$$H = \sum_1^i {}_s \frac{y_s^{-n} \cdot e^{nt}}{\left(1-e^{\alpha_1 t}\right)\ldots\left(1-e^{\alpha_\mu t}\right)\left(1-y_s^{\beta_1} e^{-\beta_1 t}\right)\ldots\left(1-y_s^{\beta_\nu} e^{-\beta_\nu t}\right)}$$

od anche:

$$H = \sum_1^i {}_s \frac{y_s^{-n} e^{nt-h}}{\left(1-y_s^{\beta_1} e^{-\beta_1 t}\right)\ldots\left(1-y_s^{\beta_\nu} e^{-\beta_\nu t}\right)}$$

posto:

$$h = \log\left(1-e^{-\alpha_1 t}\right) + \log\left(1-e^{-\alpha_2 t}\right) + \ldots + \log\left(1-e^{-\alpha_\mu t}\right).$$

Quindi sviluppando si avrà:

$$(7)\ H = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu t^\mu} \sum_1^i {}_s \frac{y_s^{-n} e^k}{\left(1-y_s^{\beta_1} e^{-\beta_1 t}\right)\ldots\left(1-y_s^{\beta_\nu} e^{-\beta_\nu t}\right)}$$

esendo:

(*) Questo è il teorema enunciato dal sig. Sylvester nel Quarterly Journal; il metodo con cui questo distinto Geometra giunse a tale risultato sembra affatto differente dal superiore; ci lusinghiamo di vederlo presto pubblicato. L'uso, del calcolo dei residui in questa questione era già stata fatta avvertire al sig. Sylvester dai sig. Terquem e Cayley.

$$k = \left(n + \frac{1}{2} s_1\right) t - \frac{B_1}{1.2^2} s_2 t^2 + \frac{B_2}{1.2.3.4^2} s_3 t^3 \ldots$$

ed;

$s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_\mu$, $s_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_\mu^2, \ldots$

B_1 , B_2 i numeri di Bernoulli.

Ne risulta che W_1 sarà il coefficiente di t^{r-1} nello sviluppo della espressione:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_r} e^k$$

nella quale:

$s_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_r$, $s_2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_r^2$;

e che supponendo a_1 , $a_2 \ldots a_r$ essere tutti numeri primi sarà:

$$(8) \quad W_m = \frac{1}{m} \sum_1^i {}_s \frac{y_s^{-n}}{\left(1 - y_s^{\beta_1}\right)\left(1 - y_s^{\beta_2}\right) \ldots \left(1 - y_s^{\beta_{r-1}}\right)}$$

quando m è un numero della serie a_1 , $a_2 \ldots a_r$ ed in ogni altro caso $W_m = 0$ (eccetto per $m = 1$). Analogamente se i numeri a_1 , $a_2 \ldots$ sono primi tra loro.

5.° Aggiungerò un esempio che sebbene assai semplice servirà a rendere più evidente la potenza di questo metodo.

Sieno $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$ essendo $s_1 = 10$, $s_2 = 38$ si ha:

$$W_1 = \frac{1}{30}\left(\frac{(n+5)^2}{2} - \frac{19}{12}\right).$$

Per trovare W_2 si osservi che l'unica radice primitiva dell'equazione $y^2 - 1 = 0$ è -1 , quindi per la formola (8):

$$W_2 = \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{4}.$$

Così le radici primitive della $y^3 - 1 = 0$ essendo le radici della $y^2 + y + 1 = 0$ si avrà per la (8):

$$W_3 = \frac{1}{3}\Sigma \frac{y^{-n}}{(1-y^2)(1-y^5)} = \frac{1}{9}\sum \frac{y^{-n}}{1+y} = -\frac{1}{9}\Sigma y^{-(n+2)};$$

ora:

$$\Sigma y^0 = 2\ ,\ \Sigma y = -1\ ,\ \Sigma y^2 = -1$$

quindi se:

$$n+2 \equiv 0 \pmod 3 \qquad \Sigma y^{-(n+2)} = \Sigma y^0 = 2$$
$$n+2 \equiv 1 \pmod 3 \qquad \Sigma y^{-(n+2)} = \Sigma y^2 = -1$$
$$n+2 \equiv 2 \pmod 3 \qquad \Sigma y^{-(n+2)} = \Sigma y = -1$$

per cui indicando con $\delta\left(\frac{k}{h}\right)$ un simbolo che rappresenti l'unità se k è esattamente divisibile per h, e lo zero in caso contrario; si avrà:

$$W_3 = -\frac{1}{9}\left[2\ \delta\left(\frac{n+2}{3}\right) - \delta\left(\frac{n+1}{3}\right) - \delta\left(\frac{n}{3}\right)\right].$$

W_4 sarà eguale a zero, ed osservando che le radici primitive della equazione $y^5 - 1 = 0$ sono quelle della $y^4+y^3+y^2+y+1=0$ si avrà

$$W_5 = \frac{1}{5}\sum \frac{y^{-n}}{(1-y^2)(1-y^3)}$$

$$= \frac{1}{5}\sum \frac{y^{-n}}{2-y^2-y^3} = -\frac{1}{25}\Sigma y^{-(n+1)}\,(1-2y+y^2)$$

per cui essendo:

$$\Sigma y^0 = 4\ ,\ \Sigma y = -1\ ,\ \Sigma y^2 = -1\ ,\ \Sigma y^3 = -1\ ,\ \Sigma y^4 = -1$$

si otterrà:

$$W_5 = -\frac{1}{25}\left[4\delta\left(\frac{n+1}{5}\right) - 10\delta\left(\frac{n}{5}\right) + 5\,\delta\left(\frac{n-1}{5}\right) + \delta\left(\frac{n-4}{5}\right)\right]$$

ed il numero delle soluzioni positive, intiere, dell'equazione:

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = n$$

sarà:

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_5$$

Per esempio per $n = 8$ si ha:

$$W_1 = \frac{199}{72}\ ,\quad W_2 = \frac{1}{8}\ ,\quad W_3 = \frac{1}{9}\ ,\quad W_5 = 0$$

ed il numero delle soluzioni è 3. Per $n = 30$ si ha :

$$W_1 = \frac{7331}{360}\ ,\quad W_2 = \frac{1}{8}\ ;\quad W_3 = \frac{1}{9}\ ;\quad W_5 = \frac{2}{5}$$

ed il numero delle soluzioni è 21.

É senza dubbio uno dei principali pregi di questo metodo il non aumentarsi del numero delle operazioni occorribili per determinare il numero delle soluzioni, aumentando la grandezza del numero n.

Pavia Febbraio 1857.

TEOREMA
DEL SIG. PROF. SYLVESTER
SULLA PARTIZIONE DEI NUMERI.

(*Estratto dal* 2.° Quarterly Journal ec. *e dall'illustre autore comunicato al redattore nell'epoca della sua dimora in Napoli*)

Siano $a_1\ a_2\ .\ .\ .\ a_r$ dei numeri interi e positivi; n il numero da comporre con gli elementi a; Q la *quotity* da trovare, cioè il numero delle soluzioni intere e positive dell'equazione $a_1x_1 + a_2x_2 + \ .\ .\ .\ + a_rx_r = n$.

Rappresenti q un qualunque numero intero e positivo, e W_q il coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo della funzione

$$\text{(S)}\quad \sum \frac{\rho^n e^{nt}}{\left(1-\rho^{a_1} e^{-a_1 t}\right)\left(1-\rho^{a_2} e^{-a_2 t}\right)\ .\ .\ .\ \left(1-\rho^{a_r} e^{-a_r t}\right)}$$

nella quale la somma Σ deve estendersi a tutte le radici primitive dell'equazione $\rho^q - 1 = 0$. Il valore della *quotity* Q sarà dato dalla formula $Q = \Sigma W_q$.

Le diverse quantità rappresentate da W_q sono indicate col nome di *onde*.

Si osservi che per trovarsi un termine moltiplicato per $\frac{1}{t}$ nello sviluppo della funzione (S), è necessario che nello sviluppo del denominatore della funzione stessa non vi sia alcun termine indipendente da t, ciò che richiede che almeno una delle quantità ρ^{a_1}, $\rho^{a_2} \dots \rho^{a_r}$ si riduca all'unità; ovvero che almeno uno degli elementi a_1, $a_2 \dots a_r$ sia un multiplo di q. Adunque per tutti i valori di q che non sono fattori degli elementi $a_1\ a_2 , \dots a_r$ si ha $W_q = 0$; e per conseguenza nella equazione $Q = \Sigma W_q$ basterà estendere la somma Σ a tutti i valori interi e positivi di q (incluso 1), che entrano come fattori degli elementi $a_1\ a_2 \dots a_r$. Per calcolare la prima *onda* bisogna supporre $q = 1$. Allora anche $\rho = 1$ ed il valore di W_1 sarà il coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo di

$$\frac{e^{nt}}{\left(1-e^{-a_1 t}\right)\left(1-e^{-a_2 t}\right) \dots \left(1-e^{-a_r t}\right)},$$

che è eguale ad

$$e^{nt - \left[\log\left(1-e^{-a_1 t}\right) + \log\left(1-e^{-a_2 t}\right) + \dots + \log\left(1-e^{-a_r t}\right)\right]}.$$

Ora, rappresentando con B_1, B_2 ... i numeri di Bernoulli, si ha

$$\frac{d\log(1-e^{-t})}{dt} = \frac{1}{e^t-1} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{B_1}{1,2}t - \frac{B_2}{1,2,3,4}t^3 + \frac{B_3}{1,2.3.4,5.6}t^5 - \text{ec.}$$

per conseguenza sarà

$$\log(1-e^{-t}) = \log t - \frac{t}{2} + \frac{B_1}{1.2^2}t^2 - \frac{B_2}{1.2.3.4^2}t^4 + \frac{B_3}{1.2.3.4.5.6^2}t^6 - \text{ec.}$$

Adunque chiamando s_ω la somma delle potenze ω degli ele-

menti $a_1\ a_2\ \ldots\ a_r$, sarà

$$W_1 = \text{coef. di } \frac{1}{t} \text{ in}$$

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_r t^r}\, e^{\left(n+\frac{s_1}{2}\right)t - \frac{B_1}{1.2^2} s_2 t^2 + \frac{B_2}{1.2.3.4^2} s_4 t^4 - \text{ec.}}$$

$$= \text{coef. di } t^{r-1} \text{ in}$$

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_r}\, e^{\left(n+\frac{s_1}{2}\right)t - \frac{B_1}{1.2^2} s_2 t^2 + \frac{B_2}{1.2.3.4^2} s_4 t^4 - \text{ec.}}$$

Mettendo ora $n + \frac{s_1}{2} = \nu$, sostituendo per B_1, $B_2 \ldots$ i rispettivi valori $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30} \ldots$ e sviluppando, si avrà

$$W_1 = \text{coef. di } t^{r-1} \text{ in}$$

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_r} \times \left(1 + \nu t + \frac{\nu^2 t^2}{1.2} + \frac{\nu^3 t^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{24} s_2 t^2 + \frac{1}{1152} s^2{}_2 t^4 + \ldots\right)$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{2880} s_4 t^4 + \frac{1}{16\,588\,800} s^2{}_4 t^8 + \ldots\right)$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{181\,440} s_6 t^6 + \ldots\right)$$

$$\times \text{ ec.}$$

Per la seconda *onda* si ha $q = 2$. In tal caso la sola radice primitiva dell'equazione $\rho^q - 1 = 0$ è $\rho = 1$. Distinguendo gli elementi $a_1\ a_2 \ldots a_r$ in due gruppi α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_l$ tutti pari, e β_1, $\beta_2 \ldots \beta_m$ tutti impari, sarà

$W_2 =$ coef. di $\frac{1}{t}$ in

$$(-1)^n e^{nt} \times \frac{1}{\left(1-e^{-\alpha_1 t}\right)\left(1-e^{-\alpha_2 t}\right)\ldots\left(1-e^{-\alpha_l t}\right)}$$

$$\times \frac{l}{\left(1+e^{-\beta_1 t}\right)\left(1+e^{-\beta_2 t}\right)\ldots\left(1+e^{-\beta_m t}\right)}$$

ossia

$$W_2 = \text{coef. di } \frac{1}{t} \text{ in } (-1)^n e^{nt-R}$$

dove

$$R = \Sigma \log(1-e^{-\alpha_1 t}) + \Sigma \log(1+e^{-\beta_1 t}) .$$

Lo sviluppo di $\log(1-e^{-t})$ è stato già trovato. Per quello di $\log(1+e^{-t})$ si ha

$$\log(1+e^{-t}) = \log(1-e^{-2t}) - \log(1-e^{-t})$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \log 2t - t + \frac{2^2}{2^2} B_1 t^2 - \frac{2^4}{4^2}\frac{B_2}{1.2.3} t^4 + \frac{2^6}{6^2}\frac{B_3}{1.2.3.4.5} t^6 - \text{ec.} \\ -\log t + \frac{t}{2} - \frac{1}{2^2} B_1 t^2 + \frac{1}{4^2}\frac{B_2}{1.2.3} t^4 - \frac{1}{6^2}\frac{B_3}{1.2.3.4.5} t^6 + \text{ec.} \end{array} \right.$$

$$= \log 2 - \frac{t}{2} + \frac{3}{4} B_1 t^2 - \frac{15}{16}\frac{B_2}{1.2.3} t^4 + \frac{63}{36}\frac{B_3}{1.2.3.4.5} t^6 - \text{ec.}$$

Se dunque si rappresenti con s_ω la somma delle potenze ω di α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_l$, e con σ_ω lá somma delle potenze ω di β_1, $\beta_2 \ldots \beta_m$; e si faccia $n + \frac{1}{2}(s_1 + \sigma_1) = \nu$; si avrà

$$nt - R = -\log(2^m \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_l) - l \log t$$

$$+ \nu t - \frac{B_1}{1.2}(s_2 + 3\sigma_2)t^2 + \frac{B_2}{1.2.3.4^2}(s_4 + 15\sigma_4)t^4 - \ldots$$

e sarà

$W_2 =$ coef. di $\frac{1}{t}$ in

$$\frac{(-1)^n}{2^m(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l)\,t^l}\times e^{\nu t-\frac{B_1}{1.2^2}(s_2+3\sigma_2)t^2+\frac{B_2}{1.2.3.4^2}(s_4+15\sigma_4)t^4-\text{ec.}}$$

$=$ coef. di t^{l-1} in

$$\frac{(-1)^n}{2^r\left(\frac{\alpha_1}{2}\cdot\frac{\alpha_2}{2}\cdots\frac{\alpha_l}{2}\right)}\times\left(1+\nu t+\frac{\nu^2t^2}{1.2}+\frac{\nu^3t^3}{1.2.3}+\ldots\right)$$

$$\times\left(1-\frac{1}{24}(s_2+3\sigma_2)\,t^2+\frac{1}{1152}\,(s_2+3\sigma_2)^2t^4-\ldots\right)$$

$$\times\left(1+\frac{1}{2880}\,(s_4+15\sigma_4)\,t^4+\ldots\right)$$

$\times$ ec.

In generale, per trovare l'*onda* W_q bisognerà distinguere gli elementi in due gruppi : α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_l$ tutti divisibili per q, e β_1, $\beta_2 \ldots \beta_m$ non divisibili per q. Sarà

$$W_q = \text{coef. di } \frac{1}{t} \text{ in}$$

$$\Sigma\frac{\rho^n e^{nt}}{\left(1-e^{-\alpha_1 t}\right)\ldots\left(1-e^{-\alpha_l t}\right)\left(1-\rho^{\beta_1}e^{-\beta_1 t}\right)\ldots\left(1-\rho^{\beta_m}e^{-\beta_m t}\right)}$$

$=$ coef. di t^{l-1} in e^{nt-R}

dove R esprime una quantità formata con le radici primitive dell'equazione $\rho^q-1=0$, e coi coefficienti numerici, che entrano nello sviluppo in potenze ascendenti di t della quantità $\frac{1}{1-c\rho^{-t}}$.

Esempio

Sia da trovare in quanti modi un numero n può essere composto con gli elementi 1, 2, 3, 4, 5, 6. I valori

di q pei quali W_q è differente da zero sono 1, 2, 3, 4, 5, 6, e perciò

$$Q = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6 \quad (*).$$

Cominciando dal cercare W_6, si ha

$$W_6 = \text{coef. di } \frac{1}{t} \text{ in}$$

$$\Sigma \frac{\rho^n e^{nt}}{(1-\rho e^{-t})(1-\rho^2 e^{-2t})(1-\rho^3 e^{-3t})(1-\rho^4 e^{-4t})(1-\rho^5 e^{-5t})(1-e^{-6t})}$$

dove la somma devesi estendere alle radici primitive di $\rho^6-1=0$, ossia alle radici $\rho^2-\rho+1=0$. Ora il termine moltiplicato per t nello sviluppo del denominatore della precendente frazione è $6(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^3)(1-\rho^4)(1-\rho^5)t$; dunque

$$W_6 = \frac{1}{6}\Sigma \frac{\rho^n}{(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^3)(1-\rho^4)(1-\rho^5)}$$

$$= \frac{1}{12}\Sigma \frac{\rho^n}{(1-\rho^2)(1-\rho^4)} = \frac{1}{36}\Sigma\rho^n .$$

Per W_5 si adoprerà la formola

$$W_5 = \text{coef. di } \frac{1}{t} \text{ in}$$

$$\Sigma \frac{\rho^n e^{nt}}{(1-\rho e^{-t})(1-\rho^2 e^{-2t})(1-\rho^3 e^{-3t})(1-\rho^4 e^{-4t})(1-e^{-5t})(1-\rho^6 e^{-6t})}$$

nella quale la somma va estesa a tutte le radici di

$$\rho^4 + \rho^3 + \rho^2 + \rho + 1 = 0.$$

Si avrà dunque

(*) In generale quando gli *elementi* sono i numeri consecutivi 1, 2 . . . r, o pure 2, 3 , , . r, le *onde* che hanno un'esistenza *attuale* (cioè che sono differenti da zero) sono W_1, W_2 . . . W_r .

$$W_5=\frac{1}{5}\Sigma\frac{\rho^n}{(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^3)(1-\rho^4)(1-\rho^6)}$$

$$=\frac{1}{25}\Sigma\frac{\rho^n}{1-\rho}=\frac{1}{125}\ \Sigma\rho^n(4+3\rho+2\rho^2+\rho^3)$$

$$=\frac{1}{125}\Sigma\,\rho^n(2+\rho-\rho^3-2\rho^4)\,.$$

Similmente

W_4 = coef. di $\frac{1}{t}$ in

$$\Sigma\frac{\rho^n e^{nt}}{(1-\rho e^{-t})(1-\rho^2 e^{-2t})(1-\rho^3 e^{-3t})(1-e^{-4t})(1-\rho^5 e^{-5t})(1-\rho^6 e^{-6t})}$$

estendendo la somma a tutte le radici di $\rho^2+1=0$. Dunque

$$W_4=\frac{1}{4}\Sigma\frac{\rho^n}{(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^3)(1-\rho^5)(1-\rho^6)}$$

$$=\frac{1}{16}\Sigma\frac{\rho^n}{(1-\rho^2)(1-\rho)}$$

$$=\frac{1}{32}\Sigma\frac{\rho^n(1-\rho)}{-2\rho}=\frac{1}{64}\Sigma\,(\rho^n-\rho^{n-1})\,.$$

In quanto a W_3, estendendo la somma a tutte le radici di $\rho^2+\rho+1=0$, abbiamo

W_3 = coef. di $\frac{1}{t}$ in

$$\Sigma\frac{\rho^n e^{nt}}{(1-\rho e^{-t})(1-\rho^2 e^{-2t})(1-e^{-3t})(1-\rho^4 e^{-4t})(1-\rho^5 e^{-5t})(1-e^{-6t})}\,.$$

I primi due termini dello sviluppo del denominatore di questa frazione essendo

$$18(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^4)(1-\rho^5)t^2$$

$$+18(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^4)(1-\rho^5)\left[\frac{\rho}{1-\rho}+\frac{2\rho^2}{1-\rho^2}+\frac{4\rho^4}{1-\rho^4}+\frac{5\rho^5}{1-\rho^5}\right]t^3,$$

si vede facilmente che dovrà risultare

$$W_3=\Sigma\frac{\rho^n\nu}{18(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^4)(1-\rho^5)}$$

$$=\frac{1}{18}\ \Sigma\frac{\rho^n\nu}{[(1-\rho)(1-\rho^2)]^2}=\frac{1}{162}\ \Sigma\rho^n\nu$$

dove

$$\nu=n+\frac{q}{2}+\frac{\rho}{\rho-1}+\frac{2\rho^2}{\rho^2-1}+\frac{4\rho^4}{\rho^4-1}+\frac{5\rho^5}{\rho^5-1}=n+\frac{q}{2}+\frac{5\rho}{\rho-1}+\frac{7\rho^2}{\rho^2-1}=$$

$$=n+\frac{q}{2}+\frac{12-5\rho-7\rho^2}{3}=n+\frac{1}{6}(65+4\rho)\ .$$

Per W_2 si ha

$$W_2=\text{coef. di } t^2 \text{ in } \frac{(-1)^n}{2^6(1.2.3.)}\left(1+\nu t+\frac{\nu^2t^2}{2}\right)\left(1-\frac{1}{24}(s_2+3\sigma_2)t^2\right)$$

dove

$$\nu=n+\frac{1}{2}(1+2+3+4+5+6)=n+\frac{21}{2},\ s_2=2^2+4^2+6^2=56,$$

$$\sigma_2=1^2+3^2+5^2=35\ ;$$

per conseguenza sarà

$$W_2=(-1)^n\left\{\frac{\left(n+\frac{21}{2}\right)^2}{768}-\frac{161}{9216}\right\}.$$

Finalmente si ha

$W_1=$ coef. di t^5 in

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6}\left(1+\nu t+\frac{\nu^2t^2}{2}+\frac{\nu^3t^3}{2.3}+\frac{\nu^4t^4}{2.3.5}+\frac{\nu^5t^5}{2.3.4.5}\right)$$

$$\times\left(1-\frac{1}{24}s_2\,t^2+\frac{1}{1152}\,s^2{}_2t^4\right)\times\left(1+\frac{1}{2880}\,s_4t^4\right)$$

dove

$$\nu = n + \frac{1}{2}(1+2+3+4+5+6) = n + \frac{21}{2},$$

$$s_2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = 91$$

$$s_4 = 1+2^4+3^4+4^4+5^4+6^4 = 8281;$$

quindi risulterà

$$W_1 = \frac{n+\frac{21}{2}}{720}\left\{\frac{\left(n+\frac{21}{2}\right)^4}{120} - \frac{91\left(n+\frac{21}{2}\right)^2}{144} + \frac{9191}{1152}\right\}.$$

I precedenti valori delle diverse onde W_6, W_5 . . . . . si possono mettere sotto altra forma nel modo seguente.

In W_6 ρ è radice di $\rho^2 - \rho + 1 = 0$. Ora si ha, dinotando con i un numero intero positivo qualunque

$$\Sigma\rho^{6i} = 2\ ;\ \Sigma\rho^{6i+1} = 1\ ;\ \Sigma\rho^{6i+2} = -1\ ;\ \Sigma\rho^{6i+3} = -2\ ;$$
$$\Sigma\rho^{6i+4} = -1\ ;\ \Sigma\rho^{6i+5} = 1\ ;$$

dunque W_6 sarà eguale al 1°, 2°, 3°, 4°, 5° o 6° dei seguenti termini

$$\frac{1}{18}, \frac{1}{36}, -\frac{1}{36}, -\frac{1}{18}, -\frac{1}{36}, +\frac{1}{36}$$

secondo che n diviso per 6 darà per resto 0, 1, 2, 3, 4 o 5. Se dunque si indichi (secondo Herschel) con r_n una quantità, che è eguale ad l quando n è multiplo di r, e che è zero in ogni altro caso, risulterà

$$W_6 = \frac{6_n}{18} + \frac{6_{n-1}}{36} - \frac{6_{n-2}}{36} - \frac{6_{n-3}}{18} - \frac{6_{n-4}}{36} + \frac{6_{n-5}}{36}.$$

Similmente, in W_5 ρ è radice di $\rho^4 + \rho^3 + \rho^2 + \rho + 1 = 0$. Ora si ha

$$\Sigma\rho^{5i} = 4;\ \Sigma\rho^{5i+1} = -1;\ \Sigma\rho^{5i+2} = -1;\ \Sigma\rho^{5i+3} = -1;\ \Sigma\rho^{5i+4} = -1;$$

dunque risulterà

$$W_5=\frac{1}{125}\Big[(8-1+1+2)5_n+(-2-1+1-8)5_{n-1}$$

$$+(-2-1-4-2)5_{n-2}+(-2-1+1+2)5_{n-3}\Big]$$

$$+(-2+4+1+2)5_{n-4}$$

$$=\frac{2}{25}5_n-\frac{2}{25}5_{n-1}-\frac{1}{25}5_{n-2}+\frac{1}{25}5_{n-4}.$$

In W_4 ρ è radice di $\rho^2+1=0$. Ma

$$\Sigma\rho^{4i}=1;\ \Sigma\rho^{4i+1}=0;\ \Sigma\rho^{4i+2}=-2;\ \Sigma\rho^{4i+3}=0;$$

dunque

$$W_4=\frac{1}{64}\Big(2.4_n-2.4_{n-1}-2.4_{n-2}+2.4_{n-3}\Big)$$

$$=\frac{4_n}{32}-\frac{4_{n-1}}{32}-\frac{4_{n-2}}{32}+\frac{4_{n-3}}{32}.$$

In W_3 ρ è radice di $\rho^2+\rho+1=0$, e si ha

$$\Sigma\rho^{3i}=2;\ \Sigma\rho^{3i+1}=-1;\ \Sigma\rho^{3i+2}=-1;$$

dunque

$$W_3=\Big(\frac{3_n}{81}-\frac{3_{n-1}}{162}-\frac{3_{n-2}}{162}\Big)\Big(n+\frac{65}{6}\Big)-\frac{3_n}{243}-\frac{3_{n-1}}{243}+\frac{2.3_{n-2}}{243}$$

$$=\Big(\frac{3_n}{81}-\frac{3_{n-1}}{162}-\frac{3_{n-2}}{162}\Big)n+\frac{7}{54}3_n-\frac{23}{243}3_{n-1}-\frac{19}{243}3_{n-2}$$

Finalmente si ha

$$W_2=\Big(\frac{n^2}{768}-\frac{161}{9216}\Big)(2_n-2_{n-1}).$$

Napoli 15 Febbraio 1857

SULLA PARTIZIONE DEI NUMERI

NOTA

DEL PROF. P. VOLPICELLI (*)

§. 1.

I successivi numeri naturali si dispongano in un rettangolo: se ne abbiano in ogni sua fila orizzontale $h+1$, ed ogni sua fila verticale $k+1$; s'incominci da n; quindi, senza interruzione, si proceda nella prima fila orizzontale da sinistra a destra, nella seconda da destra a sinistra, e sempre a questo modo sino alla fine; avremo quanto siegue:

1°. Le somme dei numeri di ogni fila orizzontale, costituiscono una progressione aritmetica, crescente dall'alto al basso, di cui la differenza costante uguaglia $(h+1)^2$, cioè il quadrato del numero dei termini, che si contengono in qualunque delle file medesime.

2°. I termini di ciascuna fila verticale, presi alternativamente, costituiscono due progressioni aritmetiche, aventi ognuna la stessa differenza costante, che sarà espressa da $2(h+1)$; cioè dal doppio del numero dei termini di qualunque fila orizzontale.

3°. Le somme dei numeri di ogni fila verticale, costituiscono la serie dei naturali senza interruzione, crescenti da sinistra a destra, se in ciascuna delle file stesse il numero dei termini sarà impari: queste somme poi saranno tutte uguali fra loro, se in ciascuna fila verticale il numero dei termini sarà pari; cosicchè chiamando a una qualunque delle somme stesse, avremo

$$(1)\qquad [2n+h(k+1)+k]\left(\frac{k+1}{2}\right)=a.$$

In questo caso, come appresso vedremo, il numero a espri-

(*) Vedi, Comptes Rendus, T. XLIV seance du 30 Mars 1857-vedi altresì Atti dell'accademia Pontificia de'Nuovi Lincei T. X 1857, p.43.

mente la somma, si trova spezzato tante volte secondo una certa legge di partizione, facile a ravvisare, quante sono le unità di $h + 1$, potendo h ricevere diversi valori.

4°. Queste proprietà si verificano, anche quando il rettangolo divenga un quadrato, cioè anche quando abbiasi $h = k$.

§ 2.

Se i numeri naturali, a cominciare da n dispongasi nelle diverse file orizzontali, sempre con ordine crescente da sinistra a destra, si avrà quanto siegue.

1°. Le somme delle file orizzontali costituiscono una progressione aritmetica, crescente dall'alto al basso, di cui la differenza costante uguaglia $(h + 1)^2$, cioè il quadrato del numero dei termini di una qualunque delle file medesime.

2°. I termini di ciascuna fila verticale, costituiscono una progressione aritmetica, di cui la differenza costante uguaglia $h + 1$, cioè il numero dei termini di ciascuna fila orizzontale.

3°. Le somme delle file verticali costituiscono un' altra progressione aritmetica, crescente da sinistra a destra di cui la differenza costante uguaglia $k + 1$; cioè il numero dei termini che si contengono in ognuna delle file verticali stesse.

4°. Queste proprietà si verificano anche quando il rettangolo divenga un quadrato, cioè anche quando abbiasi $h = k$.

Dalla (1) abbiamo

§ 3.

$$(2) \qquad n = \frac{2a - (h + 1)k^2 - (2h + 1)k - h}{2(k + 1)};$$

e chiamando m un intero da determinarsi opportunamente, sarà

$$(3) \qquad h = \frac{-k^2 - (2m + 1)k + 2(a - m)}{k^2 + 2k + 1}.$$

Indicando con γ il numeratore, e con δ il denominatore del secondo membro della (3), avremo la

$$(4)\quad \frac{(2a)^2}{\delta} = -\delta(h+1)^2 + 4a(h+1) - 4m(1-m) + 1.$$

Trovati per tanto i divisori tutti del numero dato $(2a)^2$, e scelti fra questi solo quelli quadrati pari, questi, presi per δ, forniranno, mediante la

$$(5)\qquad k = -1 + \sqrt{\delta}\,,$$

i corrispondenti valori di k interi, positivi, ed impari; quindi per mezzo della (3), e mediante acconci valori dati alla indeterminata m, avremo i corrispondenti di h, interi e positivi anch'essi. Ottenuti per tal modo i valori delle h, k, ed m, avremo eziandio quelli di n; giacchè eliminando h dalle (2), e (3), si trova essere

$$n = m.$$

§ 4.

Si rileva dal fin qui detto che il numero dato a, per mezzo del precedente metodo, viene in ogni possibile modo spezzato, secondo una certa legge di partizione, facile a riconoscere

Chiamando N il numero totale di questi spezzamenti, ognuno avente a per somma, sarà

$$(6)\qquad N = \left\{ \begin{array}{l} h'_1 + h'_2 + \ldots + h'_\alpha \\ + h''_1 + h''_2 + \ldots + h''_\delta \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + h_1^{(\nu)} + h_2^{(\nu)} + \ldots + h_\tau^{(\nu)} \\ + \alpha + \beta + \ldots + \tau \end{array} \right.$$

È facile in questa formola riconoscere il significato degli h diversamente accentati, e delle α, β, . . ., τ.

§ 5.

Dobbiamo qui avvertire che il precedente metodo fornisce anche gli spezzamenti del numero a, corrispondenti ad $h = k$. Però quando si volessero solo questi spezzamenti, allora le formule precedenti potrebbero divenire più semplici. Ed infatti, per questa ipotesi, dalla (2) si avrebbe la

$$(7) \qquad n = \frac{2a - (h^3 + 3h^2 + 2h)}{2(h+1)};$$

ed indicando con γ il numeratore, e con δ il denominatore della (7), avremo

$$\gamma = n\delta, \quad h = \frac{\delta - 2}{2};$$

dalle quali si otterrà

$$(8) \qquad \frac{16a}{\delta} = \delta^2 + 8n - 4.$$

Dunque il valore di δ dovrà trovarsi fra i divisori del numero dato $16a$: questo divisore dovrà essere pari, e tale che il valore di h ottenuto da esso, riesca impari, e renda mediante la (7) n intero e positivo. Trovati per un dato numero a i valori interi e positivi di h ed n, corrispondenti a quelli di δ, saranno pure trovati gli spezzamenti del dato numero, secondo la indicata legge di partizione, aggiuntavi la condizione $h = k$.

§ 6.

Esempio

Pongasi $a = 260$, avremo per δ il solo 64; giacchè di tutti gli altri divisori quadrati pari del numero $(2a)^2$, niuno può soddisfare. Per tanto dalla (5) e (3) avremo

$$k = 7, \quad \text{ed} \quad h = \frac{29 - m}{4};$$

quindi

$$m = n = 1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25,$$

$$h'''_1 = 7,\ h'''_2 = 6,\ h'''_3 = 5,\ h'''_4 = 4,\ h'''_5 = 3,\ h'''_6 = 2,\ h'''_7 = 1,$$

$$\alpha = 0\ ,\quad \beta = 0\ ,\quad \gamma = 7;$$

e perciò dalla (6) sarà

$$N = h'''_1 + h'''_2 + \ldots + h'''_7 + \gamma = 35.$$

Dunque il numero dato 260, potrà essere spezzato in 35 diverse maniere; ognuna corrispondente a $\delta = 64$, e tutte secondo la stessa legge di partizione, assegnata dalle precedenti formule.

I primi otto di questi spezzamenti corrispondono ad

$$n = 1\ ,\ h_1''' = 7\ ,\ k = 7,$$

e sono i seguenti

1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
17	18	19	20	21	22	23	24
32	31	30	29	28	27	26	25
33	34	35	36	37	38	39	40
48	47	46	45	44	43	42	41
49	50	51	52	53	54	55	56
64	63	62	61	60	59	58	57
260	260	260	260	260	260	260	260

§ 7.

Non è senza interesse far osservare, che lo stesso numero 260, può subire altri otto spezzamenti, non compresi nella suindicata legge: questi sono i seguenti

22	11	36	53	20	13	38	51
35	54	21	12	37	52	17	14
10	23	56	33	16	19	50	39
55	34	9	24	49	40	15	18
26	7	48	57	32	1	42	63
47	58	25	8	41	62	31	2
6	27	60	45	4	29	64	43
59	46	5	28	61	44	3	30
260	260	260	260	260	260	260	260

e come ognuno vede, rappressentano nell'insieme loro, una delle tante corse rientrantanti del cavallo sullo scacchiere di 64 case: corse dipendenti dalla legge che già indicai (*), sulla quale tornerò quanto prima.

(*) Comptes Rendus T. XXXI. seance du 2 septembre 1850.

SULLE VARIAZIONI PERIODICHE DEL MAGNETISMO TERRESTRE.

MEMORIA SECONDA.

DEL P. A. SECCHI D. C. D. G.

Nel Giugno del 1854 presentai alla Pontif. Accademia de' N. Lincei una lunga memoria sulle variazioni periodiche del magnetismo terrestre, la quale o per intero o per estratto é stata riprodotta in molti rispettabili periodici. [1] Questa favorevole accoglienza fatta ad un primo tentativo destinato a ridurre a leggi semplici una serie di fatti che si presentano come uno sconnesso labirinto, m'incoraggì a proseguirne lo studio e da quel tempo in poi non ho mai perduto di vista questo importantissimo soggetto, il quale, bisogna pur dirlo francamente, promette oggidì prossima la soluzione di qualche grande problema cosmico. Io esposi in quel lavoro la ipotesi che il Sole sia magnetico e agisca sulla terra per un azione magnetica diretta, e questa opinione non emessa prima da altri in modo aperto, mediante quella discussione delle osservazioni venne appoggiata da novelle prove e tolse più fisici dal parlare incerto usato in questa materia. Ma siccome i *fatti* devono esser la base fondamentale di ogni studio, così lasciando da parte per ora tutto ciò che può aver aspetto d'ipotesi, ho continuato a riunire i risultati delle osservazioni sotto un punto di

[1] V. questi Annali T. 5., pag. 256 anno 1854.

vista il più compendioso e lucido che fosse possibile. Questo io sono venuto facendo specialmente per le perturbazioni straordinarie, rapporto alle quali parmi che possiamo ormai stabilire alcuni fatti così generali da meritare il nome di leggi. Devo alla gentilezza del mio illustre amico il Gen. Sabine la pronta comunicazione avuta degli importanti risultati a cui esso viene arrivando a mano a mano nella discussione delle osservazioni fatte agli Osservatorii magnetici Inglesi, e qui dirò quanto può trarsi da diversi suoi interessanti lavori inseriti nelle Transazioni Filosofiche [1].

Articolo I.

Nel mio citato lavoro io considerava come di grande importanza la discussione delle perturbazioni straordinarie dell'ago come quelle che ridotte a leggi, se era possbile, potevano forse meglio di ogni altro fenomeno indicare la vera sorgente delle variazioni magnetiche. Dalle discussioni fin allora eseguite appariva già la gran legge fondamentale che esse *seguivano il tempo locale* [2] e quindi cambiavano radicalmente il modo di vedere intorno alla loro origine tenuto dianzi da molti fisici. Una discussione più estesa delle osservazioni non solo di declinazione ma anche degli altri elementi fatta per Toronto ha condotto a conseguenze di molto rilievo per apprezzare giustamente le quali è necessario indicare in breve il modo tenuto nella loro discussione. La riduzione generale delle osservazioni avea già fatto vedere entro quali limiti variava ordinariamente la posizione dell'ago, quindi finita che quella fu

[1] On periodical laws . . . . in larger magn. disturbanc. Ph. Tr. n. XV 1856 pag. 357. - On lunar diurnal Magnetic Variations at Toronto 1856. Ph. Tr. - On the influence of the Moon. ecc. 1853 Ph. Tr. Part. III pag. 550 - On the Evidence of the decennial period. ecc. 1857 I.

[2] V. mem. cit. p. 3.

si separarono dalla lor massa (dopo aver ridotte tutte le indicazioni degli stromenti ad una temperatura comune) tutte quelle osservazioni che eccedevano 5,'0 d'arco in declinazione e 1,'0 in inclinazione, e 0,0004 in forza totale: separate queste si calcolarono i medii generali delle osservazioni residue, e con un nuovo calcolo si fissarono altri limiti più accurati per termine delle oscillazioni irregolari. Però è da avvertire che gli strumenti non danno direttamente che la variazione della declinazione, e che quella dell' inclinazione e della forza totale è necessario dedurla dalle indicazioni di due apparecchi destinati a dare le variazioni della componente verticale ed orizzontale del magnetismo terrestre, il che si fa con formole opportune.

Da questo spoglio risultano le leggi con cui agiscono le perturbazioni straordinarie e possono riassumersi al modo seguente.

Periodo Diurno. Legge 1.

« Le perturbazioni seguono il tempo locale e tutti gli ele-
» menti magnetici sono affetti simultaneamente dalle per-
» turbazioni ».

Si era creduto per molto tempo che le perturbazioni magnetiche avessero luogo principalmente la sera verso le nove pom., o la mattina, e che la declinazione fosse la coordinata più affetta; questo è ora riconosciuto inesatto. Tale errore è stato conseguenza solo della facilità con cui si osserva la perturbazione in declinazione, che realmente arriva al suo massimo in quelle ore; ma discutendo anche gli altri elementi, è apparso che questi non meno del primo erano soggetti a perturbazione, e ciò in tutte le ore del giorno. Solamente vi è una essenziale differenza nelle ore in cui ciascun elemento rimane disturbato. Il Signor Sabine ha dato una tavola in cui per ciascun'ora del dì ha fissato il rapporto che si ha tra la perturbazione osservata, e la somma

delle perturbazioni totali. Da questa tavola si rileva un doppio massimo e un doppio minimo tanto per la declinazione quanto per l'inclinazione: il massimo e minimo principale di perturbazione di ciascun elemento si ha nella seguente tavola:

Declinazione verso Est	Decl. verso Ovest
Massimo princ. 9^h. pom.	20^h.
Min. princip. 21^h.	9^h.

Inclinazione

Crescente	Decrescente
Mass. princ. 14^h.	0^h
Min. princ. 0^h.	18^h

Forza totale

Crescente	Decrescente
Mass. princ. 5^h	15^h.
Min. princ. 16^h	4^h.

La legge per questi periodi non è oscura e si vede primieramente per le due specie di perturbazioni opposte una perfetta inversione: di più seguita a vedersi la legge del complemento tra il periodo di inclinazione e di declinazione, ma uno non essendo al minimo mentre l'altra è al massimo per le ore di queste vi è qualche discordanza che diviene più sensibile ne' minimi e massimi secondarii. La cosa è sembrata tanto complicata ed incerta al Gen. Sabine che esso conclude la discussione di questo punto con le seguenti memorabili parole « *Senza moltiplicare esempi di dissomi-* » *glianza si può osservare in generale, che più le sei classi* » *di perturbazione sono esaminate e paragonate tra di loro,* » *minor ragione si trova da concludere che vi sia alcuna* » *uniforme correlazione* (INTER ACCOMPANIMENT) *delle varia-* » *zioni dei diversi elementi* ».

Una sentenza di tal fatta pronunziata da un uomo che ha speso tanta fatica e studio in questa materia, mi ha trattenuto per molto tempo dal render conto di tali risultati. Persuaso come sono che le leggi di natura sono sempre sem-

plicissime, il vedervi tanta complicazione faceva sospettare qualche influenza straordinaria, che mascherasse la vera legge. Nè era irrágionevole il sospettarlo, perchè rimane ancora qualche incertezza nella scienza sul vero modo di applicare i coefficienti di temperatura, avendo dimostrato il Sig. Dufour (1) la grande influenza che ha in ciò la temperatura a cui furono calamitate le sbarre. Io stava in questa sospensione quando fortunatamente mi venne in mente di analizzare graficamente tali risultati onde vedere di trarne qualche conseguenza e parmi averne ottenuto alcune assai importanti.

Ho già fatto notare nella prima mia memoria che l'inclinazione e la declinazione hanno nelle latitudini intermedie un periodo composto di un periodo diurno e di uno semidiurno, e che una è nelle sue fasi complementaria dell'altra, quindi se la declinazione ha per periodo

$$x = A + B \cos (a + h) + C \cos (2h + b)$$

essendo h l'angolo orario del sole, l'inclinazione avrà per periodo

$$y = A' + B' \sin (a' + h) + C' \sin (2h + b')$$

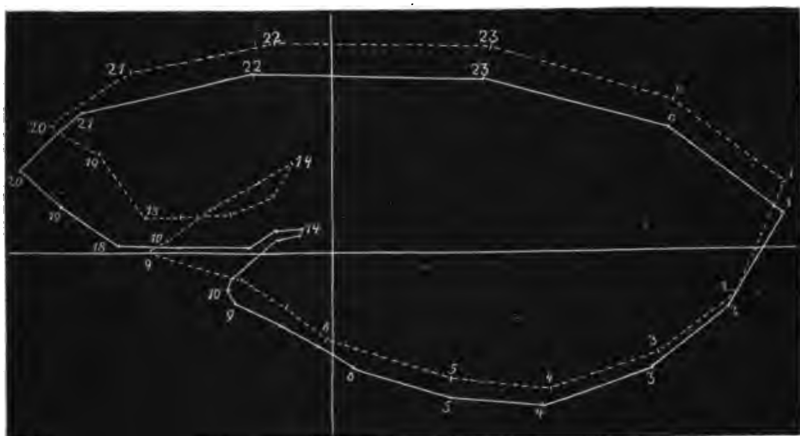
Ho anche fatto notare la specie di curva che traccerebbe un ago libero sospeso pel suo centro di gravità, ed ho dato gli esempi tratti dalle curve costruite sulle osservazioni di Hobarton pei due mesi solstiziali. Questa curva è una specie di epicicloide della forma di una foglia a due lobi uno dentro l'altro e che più o meno modificata si osserva realmente descritta dall' ago. Questa si costruisce prendendo per ciascun ora del giorno una lunghezza sull'asse dell'ascisse eguale alla variazione di declinazione ed erigendo alla sua estremità una ordinata proporzionata alla variazione di inclinazione propria della stessa ora. Ho dunque preso le due serie di numeri date da Sabine nel tom. 2. delle osservazioni di Toronto che sono i seguenti (2)

(1) Oss. Toronto 1845 pag. VII. LXXVII.

(2) B. Univ. 1857 Genn.°

Ore di Tempo m. astr.	Declinazione Ovest med.	Inclinazione med.	Effetto medio diurno prodotto dalle pertubazioni in Declinaz.	in incli.	nella forza totale
12	30.'18	+ 0'. 03	0'. 33 E.	+ 0'.14	—.000098
13	30. 34	+ 0. 05	0. 26 E.	+ 0. 18	—.000125
14	30. 40	+ 0. 09	0. 17 E.	+ 0. 19	—.000132
15	30. 15	+ 0. 07	0. 16 E.	+ 0. 14	—.000138
16	29. 78	+ 0. 02	0. 15 E.	+ 0. 12	—.000123
17	29. 07	+ 0. 02	0. 02 O.	+ 0. 10	—.000109
18	28. 37	+ 0. 03	0. 29 O.	+ 0. 10	—.000093
19	27. 76	+ 0. 14	0. 41 O.	+ 0. 18	—.000092
20	27. 12	+ 0. 29	0. 52 O.	+ 0. 16	—.000047
21	27. 94	+ 0. 47	0. 46 O.	+ 0. 13	—.000032
22	30. 05	+ 0. 59	0. 30 O.	+ 0. 10	—.000008
23	32. 89	+ 0. 57	0. 11 O.	+ 0. 09	—.000007
0	35. 25	+ 0. 41	0. 11 O.	+ 0'.09	+.000015
1	36. 84	+ 0. 14	0. 03 O.	+ 0. 09	+.000027
2	36. 07	— 0. 18	0. 09 O.	+ 0. 05	+.000042
3	35. 01	— 0. 43	0. 08 O.	+ 0. 07	+.000054
4	33. 70	— 0. 55	0. 09 O.	+ 0. 05	+.000068
5	32. 39	— 0. 52	0. 04 O.	+ 0. 08	+.000073
6	31. 24	— 0. 39	0. 18 E.	+ 0. 14	+.000058
7	30. 80	— 0. 30	0. 34 E.	+ 0. 14	+.000062
8	30. 35	— 0. 21	0. 52 E.	+ 0. 16	+.000047
9	29. 70	— 0. 14	0. 87 E.	+ 0. 16	+.000016
10	29. 75	— 0. 10	0. 61 E.	+ 0. 15	+.000022
11	29. 72	— 0. 06	0. 53 E.	+ 0. 16	+.000047

operando su questi numeri al modo indicato, si ottiene la curva o piuttosto il poligono che è rappresentato con tratto continuo in questa figura:



Tal poligono medio ritiene la forma fondamentale della curva, indicata di sopra, ma è notabile il grande restringimento del lobo sinistro inferiore. Cotesto poligono rappresenta la curva che come abbiamo detto descriverebbe a Toronto la punta di un ago libero a muoversi in qualunque direzione nello spazio attorno il suo centro di gravità; ora se ciascuna ascissa e ciascuna ordinata propria di ciascun' ora si aumenti o si diminuisca dell'effetto medio dovuto alle perturbazioni, come si vedono nella colonna 4ª e 5ª, si avrà la curva punteggiata della stessa figura. Una semplice occhiata fa vedere la somiglianza dei due contorni, la sola differenza sostanziale consiste in uno spostamento totale, quindi una importante conseguenza che può enunciarsi come una legge generale.

2ª. *Legge*

« La curva perturbata, è la curva diurna ordinaria ma » spostata interamente di certa quantità ».

Questa conclusione non può sorprendere chi abbia pratica nella osservazione de' fenomeni periodici. La curva diurna barometrica p. e. sempre sussiste, ma per riconoscerla bisogna considerarla ora trasportata in alto ora in basso sopra un asse di ascisse che sia preso sulla tangente alla curva che rappresenta le grandi onde atmosferiche.

La enunciata legge dello spostamento basta a legare fra loro le due variabili inclinazione e declinazione; ma la connessione della forza totale non pare che vi sia abbastanza chiarita, però una semplice ispezione della curva comparata colla 5 colonna della tavola superiore tratta dalle osservazioni mette tutto in armonia. Da questa si ricava che le ore di perturbazione nella forza totale magnetica con valore che sia in aumento, sono le 3, 4, 5, pom. e quelle in cui si produce decremento sono le 15 e 16. Ora un esame della suddetta curva mostra che queste ultime ore cadono nella parte inferiore dei due lobi, e le altre nel superiore, onde per le perturbazioni in aumento *cresce il lobo minore*, e per *quelle in decremento cala il lobo maggiore*, dal che possiamo concludere la

3ª. *Legge*

« Che per le perturbazioni la curva tende sempre più a » divenire simmetrica ed eguale nei suoi *due lobi* ».

Questa conseguenza se ben si riguarda è molto singolare, ed essendo inaspettata meritava una ulteriore conferma; ciò io ho fatto costruendo separatamente le curve in cui le perturbazioni in declinazione e inclinazione modificano la curva principale deviando in declin. all'Est e aumentando l'inclinazione, e in declinazione deviando all'Ovest, e diminuendo le inclinazioni, ed ho veduto in effetto che queste due curve così prodotte sono assai più tendenti alla simmetria ed eguaglianza de'lobi che la curva media generale,

con questa aggiunta interessantissima, che nel primo caso tutta la curva si trova esser più allargata, nel secondo più ristretta.

Non essendo però nella memoria di Sabine dati i valori angolari di queste ultime variazioni, ma solo i rapporti dei numeri delle varie ore alla somma media generale, ho dovuto supporre questi quozienti proporzionali alle deviazioni singole, e ho preso nella scala di costruzione un decimo del valore loro, come una quantità esprimente la variazione stessa. Le due curve così separatamente costrutte mostrano come ho detto una tendenza ben pronunciata, nel primo caso ad aumentare tutta l'area della curva e a diminuirla nel secondo, per cui risulta abbastanza manifesto che questi *periodi sono connessi da legge molto semplice che ha per base una variazione del valore nella forza che produce le variazioni periodiche e si manifesta nella variazione dei diversi elementi secondo che richiede la legge geometrica della decomposizione delle forze*. Perciò d'ora innanzi si potranno rappresentare queste oscillazioni con formole analitiche, che riusciranno di grande semplicità.

È da sperare che queste conclusioni dedotte per Toronto rapporto ai 3 elementi magnetici completi si verifichino anche per gli altri paesi pei quali non è stata fatta ancora la discussione, ma ciò avverrà certamente come già si sono verificate altre variazioni di cui passiamo a parlare.

Periodo annuale

Questo periodo assai importante è molto semplice e può riassumersi nella seguente

Legge 4ª.

» Le perturbazioni sono massime negli equinozi e minime » nei solstizi ». La tavola seguente dà la prova palpabile di questo fatto e i rapporti del medio generale annuale al mensile nelle principali stagioni.

Numero di perturbazioni osservato nei varii mesi

Mese	Decl.	Inclinaz.	F. orizz.	F. vertical.
Settembre	1,62	1,71	1,61	1,64
Decembre	0,76	0,58	0,61	0,65
Marzo	1,42	1,50	1,49	1,47
Giugno	0,53	0,36	0,50	0,46

qui si vede che per un mese solstiziale le perturbazioni sono appena $\frac{1}{3}$ di quelle osservate negli equinozi. Ora è necessario ricordarsi due cose: 1. che negli equinozi succede il cambiamento generale di azione da positiva a negativa il quale passaggio ha luogo all'attraversare che il Sole fa l'Equatore magnetico: quindi allora la forza direttrice annuale rimane quasi nulla e ogni perturbazione straordinaria riesce sensibilissima: 2. nelle stagioni equinoziali i poli del Sole sono rivolti verso la terra onde la sua azione magnetica deve esser più potente. Sarebbe da cercare se le perturbazioni sono dominanti più in un senso che in un altro, secondo che i diversi poli solari sono diretti alla terra. Il sig. Wolf ha creduto che le macchie solari abbiano annualmente qualche relazione con questi moti, e che anche un minimo pure in queste si osservi nei solstizi. Ciò non è impossibile ma non so che sia finora abbastanza provato: almeno non è ben dimostrato che ciò non sia una coincidenza meramente accidentale.

Periodo decennale

Ben più certo è il periodo di macchie solari decennali e il corrispondente cambiamento delle variazioni magnetiche

in questo stesso periodo. Tal conclusione si trova verificata anche dalle recenti discussioni delle osservazioni di Hobarton e risulta che la somma delle variazioni fu come segue:

Per Toronto vi fu un minimo nel 1844 rappresentato da 0,44, e un massimo nel 1848 del valore 1.97. cioè un numero quasi quintuplo. La discussione delle perturbazioni straordinarie a Hobarton fatta come sopra rapporto alle declinazioni (le sole che siano finora discusse), ha dato questi risultati

1841 e 42	1843 e 44	1845 e 46	1847 e 48
45″, 5	31″; 5	36, 3	67, 9

ove nel 1844 si ha meno della metà del 48. Una serie di osservazioni costantemente continuate dal 1841 al 54 nelle ore 2 p. e 6 a. dà la serie seguente

1841 =	5′,61	1848 =	7.′95
2	5. 25	9	7. 24
3	5. 25	1850	6. 25
4	5. 11	1	6. 25
5	6. 02	2	6. 82
6	5. 61	3	5. 32
5	7. 31	4	5. 96

Ove è fuori di dubbio il massimo nel 48. e il decremento prima e dopo. Questo periodo è dunque messo fuori di dubbio, ed io nella citata mia memoria l'avea rintracciato addietro perfino al 1823 epoca di minimo, e nel 1829 epoca di massimo (1) : delle osservazioni di Gottinga si ha un massimo dal 1836 al 1837, talchè questo punto è molto ben provato

(1) Arago. opere scientif. V. I. pag. 500. Questo è il solo merito che io abbia in questa scoperta, cioè l'avere rintracciato tanto addietro questo periodo, prima di ogni altro. La sua scoperta però sembra esser stata fatta simultaneamente e indipendentemente prima da Sabine e poi da Wolf.

Così pure pare ben assicurata la coincidenza di questo periodo con quello delle macchie solari.

Quest'ultima coincidenza è così straordinaria quanto essa è inaspettata, non essendovi in natura alcun periodo decennale riconosciuto che possa sospettarsi aver relazione con tali cambiamenti. La connessione però di questi due periodi se ci sarà confermata da posteriori studi, sarà una delle più illustri scoperte del nostro secolo. Wolf e Schwabe credono che sia questo periodo accompagnato anche da variazioni di luce e di calore, ma sarebbe necessario trovare un modo *semplice* e *sicuro* per determinare l'azione calorifica *assoluta* del sole, e sfortunatamente ciò è difficile specialmente per le vicende atmosferiche terrestri. Ad ogni modo mi sembra più importante e da studiarsi, se la coincidenza tra le macchie e le variazioni magnetiche resti costante, di quello che impegnarsi per ora a fissare un periodo assoluto. Il Sig. Kreil (1) faceva osservare che il minimo del periodo magnetico non era ancora giunto nel 1855; ma già d'altra parte il Sig. Wolf (2) nota recentemente che solo nella seconda metà del 1856 le macchie erano divenute più copiose onde sarebbe accaduto un minimo nei primi mesi di questo stesso anno, Però questo studio sulle macchie, secondo me, ha bisogno d'esser condotto con qualche miglior sistema che non è stato fatto finora, perchè non basta numerare i gruppi o le macchie, ma anche è mestieri tener conto delle loro posizioni se vuolsi concludere con esattezza qualche cosa di preciso nei dettagli. Attesa l'obbliquità dell'asse solare al raggio visuale non tutte le macchie rimangono equal tempo visibili in tutte le stagioni, e ciò può dar indizio di periodi che non hanno altra realtà che quella della projezione de' paralleli solari sulla sfera celeste. Una cosa di tanta impor-

(1) Erste Ergebnisse der magn. Beobachtungen in Wien. 1856 pag. 14,
(2) 3. Mitteilung über die sonnen Flecken märz 1857.

tanza speriamo che d'ora innanzi non sarà trascurata negli osservatorii magnetici e meteorologici, giacchè ad essa è congiunta la scoperta di una delle più importanti leggi cosmiche che esistono in natura.

Articolo II.

Influenza magnetica della Luna

L'influenza magnetica della Luna è stata già sospettata da molti come ho indicato nella mia prima memoria; ma una positiva discussione di osservazioni relativa all'angolo orario lunare non era ancora stata fatta. Il Sig. Kreil la sospettò dietro la discussione delle osservazioni di Praga e il Sig. Broun Allan dietro quelle di Makerstoun arrivarono a comprovare tale influenza. Tuttavia non era essa così manifesta da togliere ogni dubbio, tanto più che vi si vedevano nei periodi delle curiose singolarità come, per es. il Sig. Kreil notava in Praga il massimo maggiore al passaggio meridiano inferiore, e la sua mancanza di effetto nei mesi invernali Tuttavia era messa abbastanza fuor di dubbio specialmente a Makerstoun la sua influenza nel perigeo e nell'apogeo, e anche negli estremi di declinazione.

Era troppo importante la questione perchè non venissero discusse sotto questo punto di vista le osservazioni fatte agli osservatorii magnetici inglesi; e questo lavoro è stato appunto intrapreso e diretto con rara perspicacia del Gen. Sabine per Toronto, S. Elena ed Hobarton, e ne è riuscita una prova non dubbia dell'azione magnetica del nostro satellite. Un effetto così piccolo però, onde esser messo in evidenza richiedea una cura particolare, onde si procedette al modo seguente. La prima cosa fu di omettere tutte le osservazioni perturbate: la seconda di trovare l'ora lunare più vicina corrispondente alla solare a cui era fatta l'osservazione:

terzo l'eliminazione dell'effetto solare, il che si otteneva trovando la differenza tra l'osservazione attuale e il medio mensile proprio di quella stessa ora, e queste differenze, in luogo delle osservazioni dirette, furono quelle che servirono di base a tali investigazioni ([1]). Così furono discusse per Toronto 38398 osservazioni per S. Elena 33771 e per Hobarton 33578 cioè in tutto 105747: le conseguenze a cui si è arrivato possono riassumersi al modo seguente.

» Tutti gli elementi magnetici sono affetti dalla presenza » lunare; per la declinazione dell'ago, la sua influenza si mani» festa sotto la forma di un periodo diurno e semidiurno, » ma il diurno è assai poco sensibile e il principale è il se» midiurno. I massimi coincidono coi passaggi della luna » al meridiano magnetico superiore e inferiore; ma nelle » varie stazioni vi è una piccola diversità come appunto » accade pel sole; cioè per Toronto si ha il massimo con» temporaneo e a Hobarton un ora e mezzo più tardi, a » S. Elena a 3^h dopo il meridiano. Le variazioni d'incli» nazione sono complementarie a 3 ore di distanza con quelle » della declinazione ; insomma si ripetono per la luna leggi » simili a quelle esaminate già pel Sole ». Le massime escursioni sono per Toronto 27″; per Hobarton 20″; per S. Elena 10″; però in tutte e tre le stazioni si trova l'escursione Occidentale di circa $\frac{1}{3}$ maggiore della orientale. Le deviazioni in declinazione attesa la grandezza del loro coefficiente sembrano affatto sicure; le altre benchè non dubbie pure sarebbe bene confermarle con più lunga serie di osservazioni attesa la loro piccolezza.

Soggiungo i termini principali delle formole date da Sabine per la declinazione, che epilogano la legge di tale osservazione.

La variazione lunare nella declinazione magnetica può

([1]) Sabine Ph. Trans. 1853 p. 551.

dunque esprimersi come segue: chiamando *a* l'angolo orario della luna, si ha a Toronto dal 1842 al 1848

$$\Delta x = -0,''00 - 1''.05 \sin (a + 348,°8) + 19''.18 \sin (2a + 271.°3)$$

e a Hobarton dal 1841 al 1848

$$\Delta x = + 0.''23 + 0''.98 \sin (a + 318, 4) + 8.''75 \sin (2a + 45.°8)$$

Per S. Elena dal 1842 al 1847

$$\Delta x = + 1.''11 + 5''34 \sin (2a + 137°.51)$$

Le altre variazioni sono evidentemente conseguenze dipendenti dalla variazione della forza totale in correlazione alla decomposizione delle forze. Infatti vediamo che ove la componente orizzontale è minore ivi la variazione è maggiore: le forze totali pei tre indicati luoghi sono per Toronto 3,54 per Hobarton 4.51 e per S. Elena 5,57; il che deve appunto accadere,perchè ogni variazione sopraggiunta a una forza sarà capace di produrre tanto più effetto, quanto la forza stessa fondamentale è minore. È curioso il vedere che le ore dei massimi e de'minimi sono tanto diverse nei diversi luoghi; ma cesserà la sorpresa se considereremo che nei parametri delle ore bisogna far entrare non il meridiano geografico ma il magnetico; ora a S. Elena la declinazione è assai forte = 23° 25′ Ovest, mentre ad Hobarton è 9,° 55′ Est e a Toronto 1° 24′ Ovest.

Le variazioni lunari sono di molta importanza per la teoria fisica del magnetismo de' corpi celesti, perchè la influenza lunare non è soggetta alla grave modificazione calorifica indotta dal Sole sul globo terrestre. E infatti noi vediamo le curve lunari molto più simmetriche che le solari. Ho già indicato nel primo articolo di essa memoria che la curva diurna é una specie di doppia ovale nata dalla costruzione delle due formole

$$x = A = B \cos(a + h) + C \sin(b + 2h)$$

$$y = A' + B' \sin(a' + h) + C' \sin(b' + 2h)$$

In queste formole i coefficienti A, B, C. . . . dipendono dal rapporto tra la forza assoluta terrestre e la perturbante, dalla latitudine magnetica delle stazioni e dalla declinazione dell'astro, mentre i parametri costanti a, b. . ., dipendono dalla direzione specialmente del meridiano magnetico. Siccome però vediamo che pel Sole l'intensità deviatrice dell'ago è tanto più forte di giorno, non può negarsi in quest'astro una specialità di qualche azione magnetica connessa colla sua luce e col suo calore. Dico *connessa in qualche modo*, perchè non si può definire per ora come essa agisca: ma qualunque essa sia, è certamente di origine magnetica come la prova il gran fatto del rovesciamento di azione nel passaggio del sole per l'Equatore, e la specialità dei periodi semplici in alcune componenti che solo ricevono spiegazione dalla teoria magnetica. Si è cercato se nella Luna avesse luogo un periodo decennale, come nel Sole, ma la discussione fatta perciò da Sabine non ha trovato nulla, ed anzi se vi è periodo in ciò, esso sembra manifestarsi piuttosto in verso opposto a quello del Sole. Ma gli anni discussi sono forse ancora pochi per decidere alcuna cosa con sicurezza.

Articolo III.

Variazioni secolari.

È noto fino dai tempi di Cassini e di Halley che gli elementi magnetici sono soggetti a variazioni che accadono lentamente, dette perciò secolari, le quali benchè piccole, pure per la non interrotta progressione sono tali da far cambiare aspetto totalmente alla distribuzione del magnetismo sul globo terrestre. Non intendo io qui di entrare a parlare di tutte que-

ste variazioni che si esigerebbe per ciò un'opera intera; ma solo voglio accennare al lavoro pubblicato dal Gen. Sabine nell'Atlante Fisico di Johnston in cui si riassume lo stato magnetico del globo terrestre pel 1840 e si mette a confronto con quello tracciato da Hansteen pel 1787. Io ho confrontato queste mappe con quella che sta nell'opera *de Magnete* di Mussembroek pel 1700. Abbiamo così tre mappe preziose le quali conducono a interressanti conseguenze sul giro del magnetismo terrestre e servono a spiegare uno dei paradossi più curiosi che fece già non poca difficoltà ai fisici. La carta suddetta di Mussembroek dà la declinazione osservata da Halley colle inclinazioni di Pound, essa non è molto estesa ma malgrado questo è interessantissima essendo uno dei pochi monumenti fedeli che si abbia. Questa mappa presenta due linee senza declinazione ben complete e porzione di una terza: la prima che per brevità diremo occidentale o atlantica, corre appunto nell'Oceano Atlantico quasi nel bel mezzo di questo immenso canale che separa i due continenti. Essa nell' emisfero australe traccia in mare una linea di poco inclinata al meridiano geografico che passa a circa 20° dalla costa del Capo di B. Speranza, e attraversa l' equatore al 16° meridiano Ovest, passa per le isole di Capo Verde, e di là voltandosi molto obbliquamente verso il nuovo continente passa per le isole Bermude sopra la Florida, ed entra nel continente Americano per la Carolina. La seconda che chiameremo orientale, si estende attraverso il centro della nuova Olanda, taglia l'Equatore al 120° meridiano tra Borneo e le Filippine, e per la penisola di Corea entra nella Cina. Il rudimento della 3ª linea che sta nel mar pacifico settentrionale non è tracciato che presso la California, e non è fondato sulle osservazioni di Halley, ma su quelle di *Le Lesse* ed è singolare questa linea per avere da ambedue le parti la declinazione orientale, mentre quelle di Halley l'hanno orientale da un lato e occidentale dall'altro. La scarsezza

delle osservazioni in quel tempo non permise ulteriore investigazione e molti sospettarono una quarta linea, altri invece volle che questa fosse una continuazione di alcuna delle altre due; ma le osservazioni successive hanno rischiarato questo punto in modo singolare come vedremo fra poco.

La carta di Hansteen pel 1787 mostra queste linee notabilmente trasportate. La linea Occidentale che sta nell'Atlantico trovasi aver fatto la traversata di quasi tutto quel mare talchè in quell'epoca già corre rasente la punta prominente del Continente dell'America meridionale del Brasile detta capo S. Rocco, e di là traversa l'Equatore al 50° meridiano occidentale ed entra nel continente Americano nella Carolina poco distante dal luogo antico. Quindi ne segue che questa linea si è notabilmente raddrizzata nel suo corso; nell'interno del continente passa pel Canadà e va verso il polo non dilungandosi gran fatto dalla Baia di Hudson.

L'altra linea orientale senza declinazione ha un corso estremamente tortuoso ed irregolare: essa attraversa ancora per mezzo l'Australia o N. Olanda, passa sopra Borneo facendo una sensibile inflessione, sale fino all'isola Formosa delle Filippine, e di là ridiscende giù, e toccando appena la Cina, Siam, Malacca, viene a traversare Sumatra: indi seguitando a discendere fino al 15° parallelo australe torna a risalire e attraversa Ceylan, e scorrendo per la Baia di Bengala, attraversa la Cina, nel qual corso di nuovo s'inflette verso il littorale del Giappone sale sopra il circolo artico al 120° merid.° Est, ridiscende in Siberia ad Irkustk e per tortuoso giro si accorta al lago di Aral presso il Mar Caspio e di là risale di nuovo fino alla nuova Zembla. Un corso così strano e tortuoso in cui la stessa linea spesso ritorna quasi sopra sè stessa mostrava vicina una fase di notabile cambiamento e questo infatti si vede nelle tracce date ora da Sabine del 1840.

Nella mappa di quest'ultima epoca la linea atlantica senza declinazione si è assai internata nel continente Brasiliano, e si è anche assai raddrizzata: onde benchè obbliqua al meridiano non lo è tanto quanto lo era nel 1787: entra ancora nell'America Settentrionale per la Carolina, ma ne esce per rimettersi in mare nella Baia di Hudson il che non faceva nell'altra epoca. Ma la linea orientale presenta singolari fenomeni. Essa corre quasi come dianzi sull'Australia, ove però ha camminato fuor del centro di questo continente, andando verso l'Oceano Indiano. Di là sale in linea retta al parallelo di Giava e ivi si piega ad angolo retto, e corre per 40° il 10° parallelo australe: fino all'80° meridiano Est: di là per corso obbliquo, si getta nel Golfo Persico, attraversa il mar Caspio, dal quale si dirigge alla Lapponia e fra il Capo Nord e la Nuova Zembla va nel mare glaciale. Dal suo corso è dunque sparita tutta la complicazione di prima, ma invece si presenta un fenomeno singolare, ed è una specie di isola di forma ovale il cui diametro maggiore si èstende dal 18° al 68° parallelo ed il minore dal 103° al 149° meridiano Est e abbraccia quasi tutta la Cina e il Giappone. In tutta questa ovale la declinazione è occidentale, e l'isola appunto cade presso il luogo ove nel 1787 appariva il principal regresso della linea. Questo singolare fenomeno dà la spiegazione del fatto dedotto dalle osservazioni di De Lesse, indicato di sopra, bastando perciò ammettere che una di queste sinuosità o isole molto ristrette anticamente esistesse presso la California. L'andamento delle linee senza declinazione è così progressivo verso occidente che non può dubitarsi che non sia per continuare. La 1.ª linea atlantica avrebbe percorso sull'equatore 32° in 140 anni, e l' altra circa altrettanto. Ma non vi è ragione da supporre il loro moto uniforme. Tuttavia a S. Elena la declinazione varia constantemente di 8′ all'anno; ma nei luoghi ove passa la seconda linea un tal moto dee andare a salti atteso i limiti irregolari che essa si trova avere.

Le variazioni geografiche delle linee senza declinazione sono accompagnate dalle variazioni della declinazione negli altri luoghi, e da queste variazioni può dedursi l'andamento delle altre. Ora risulta dalle osservazioni di Kreil ed altri che tali variazioni di declinazione almeno in Europa non sono punto uniformemente progressivi. Le due linee senza declinazione non si sono potute tracciare fino al polo; ma a ciò ha supplito Gauss colla teoria.

Riassumendo il detto finora, si vede che non è punto necessario ammettere quattro di tali linee: gli studi più accurati hanno fatto conoscere che la distribuzione del magnetismo sul globo non è così semplice come si credeva da principio dietro costruzioni geometriche. Anzi è necessario distinguere tra il polo inteso come punto di 90° di inclinazione dell'ago il quale ritrovasi nell'emisfero nord a 73°,35 di latitudine e 264°,21 di long. e i punti di *massima forza* che stanno da esso assai lontano, e che sembrano esser quattro: due dell'emisfero Nord e due nel Sud. Per riconoscere la loro presenza è necessario determinare l'intensità della forza e costruire le linee isodinamiche; ora questo si è fatto con bastante sicurezza pel nostro emisfero e si è trovato che il polo Nord più debole (così inteso) stà in Siberia a 120° di long. Est, e latit. 71° Nord con intensità 13.3 e l'altro più forte e nell'America settentrionale Inglese a 52° latit. e 268° long. Est, con intensità 14.4. Per l'emisfero australe gli elementi determinanti i poli sono meno precisi essendo dedotti solo dall'andamento delle curve isodinamiche; il più forte starebbe a circa 134° di long. est al Sud della nuova Olanda e l'altro a 240° circa di long. a latitud. quasi eguale e il punto di 90° di inclinazione sarebbe di alcuni gradi al nord del Circolo polare cioè assai distanti dal polo di rotazione: questi due poli hanno forza maggiore che i boreali (cioè circa 15,14) ed essendo più vicini danno una forma particolare alle linee isodinamiche le quali presso i poli in ambedue gli emisferi assumono l'aspetto di lemniscate.

Le mappe di Sabine danno anche la distribuzione delle linee isogoniche o d'inclinazione per le due epoche 1840 e 1780, e quelle di forza o isodinamiche pel 1840. Quelle di inclinazione atteso il movimento de'poli hanno subito notabili variazioni benchè non tanto sensibili all'occhio quanto le declinazioni. Quelle poi di forza totale cominciando il loro studio da Humboldt e Gauss in poi, non hanno riscontro nell'antichità. La conclusione più importante che si può trarre da questi studi, è l'andamento ben assicurato del progressivo corso delle linee neutrali in declinazione, e quindi di tutta la distribuzione del magnetismo terrestre *secondo il corso apparente del Sole*, ma non è possibile per ora nulla definire sulle leggi più particolari del loro corso o sulle cause da cui esso dipende. Tuttavia anche in questo sembra di vederci una non equivoca influenza del corso dell'astro dominatore della natura.

Le molteplici e vaste ricerche intrapese sul magnetismo terrestre in questi ultimi anni specialmente nei mari polari e nei *viaggi magnetici* fatti in Inghilterra, Austria, Baviera, alta Italia, Belgio, Olanda, Russia, potranno somministrare dati utilissimi alla teoria, onde anche questo complicatissimo soggetto sarà presto ridotto a semplici formole; il che giova sperare dopo i brillanti successi ottenuti da Gauss, Sabine ed Hansteen: ma se mai in altra materia, in questa si verificherà che solo i nostri tardi nepoti ne trarranno profitto.

SOPRA LE SERIE DOPPIE RICORRENTI.

MEMORIA

DEL PROF. ENRICO BETTI

---

1. Una serie doppia

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} u_{m,n} = u_{0,0} + u_{1,0} + u_{2,0} + n_{3,0} + \ldots$$

$$+ u_{0,1} + u_{1,1} + u_{2,1} + u_{3,1} + \ldots$$

$$+ u_{0,2} + u_{1,2} + u_{2,2} + u_{3,2} + \ldots$$

$$+ u_{0,3} + u_{1,3} + u_{2,3} + u_{3,3} + \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

la quale abbia i termini sottoposti a verificare l'equazioni

$$(2) \qquad \sum_{s=0}^{s=\mu} \sum_{r=0}^{r=\mu-s} a_{r,s}\, u_{m+\mu-r-s,\, n+r} = 0 \,,$$

$$(3) \qquad \sum_{s=0}^{s=\nu} \sum_{r=0}^{r=\nu-s} b_{r,s}\, u_{m+\nu-r-s,\, n+r} = 0 \,,$$

si potrà chiamare *ricorrente* per l'analogìa che ha colle serie ricorrenti ordinarie.

2. In generale, dati i $\mu\nu$ termini nei quali il primo indice è minore di μ e il secondo minore di ν, o viceversa, l'equazioni (2) e (3) determineranno compiutamente tutta quanta la serie.

Infatti, gli altri termini o avranno la somma degl'indici maggiore di $\nu-1$ e minore di μ; o maggiore di μ e minore di $\mu+\nu-1$; o maggiore di $\mu+\nu-2$.

1.° I termini che hanno la somma degl' indici eguale $\rho>\nu-1$ e $<\mu$ sono $\rho+1$, ν dei quali, cioè

$$u_{\rho,0}\,,\ u_{\rho-1,1}\,,\ \ldots\ u_{\rho-\nu+1,\nu-1}\,,$$

sono dati, e gli altri $\rho-\nu+1$ si esprimono linearmente per i termini che hanno la somma degl'indici $<\rho$, risolvendo le $\rho-\nu+1$ equazioni di primo grado, che si ottengono dall'equazione (3), ponendovi successivamente

$$m=0,\ n=\rho-\nu\,;\ m=1,\ n=\rho-\nu-1\,;\ \ldots\,;\ m=\rho-\nu\,,\ n=0.$$

2.° Dei $\rho+1$ termini che hanno la somma degl'indici eguale a $\rho>\mu-1$ e $<\mu+\nu-1$ ne sono dati $\mu+\nu-\rho+1$, cioè $u_{\mu-1,\rho-\mu+1}\,,\ u_{\mu-2,\rho-\mu+2}\,,\ \ldots,\ u_{\rho-\nu+1,\nu-1}\,,$ e gli altri $\rho-\nu+1+\rho-\mu+1$ si esprimono linearmente in funzione di quelli che hanno l' indice $<\rho$, mediante le $\rho-\nu+1$ equazioni che si deducono dall'equazione (3), facendovi successivamente

$$m=0\,,\ n=\rho-\nu\,;\ m=1\,,\ n=\rho-\nu-1\,;\ \ldots\,;\ m=\rho-\nu,\ n=0,$$

e mediante le $\rho-\mu+1$ equazioni che si ottengono dall'equazione (2), ponendovi successivamente

$$m=0\,,\ n=\rho-\mu\,;\ m=1,\ n=\rho-\mu-1\,;\ \ldots\,;\ m=\rho-\mu,\ n=0.$$

3.° Dei $\rho+1$ termini che hanno la somma degl'indici eguale a $\rho>\mu+\nu-2$ non n' è dato alcuno ; ma si determinano in funzione dei termini che hanno la somma degl' indici $<\rho$, mediante le $\rho-\mu+1$ equazioni dedotte dall'equazioni (2), dando a m e a n successivamente tutti i valori interi la somma dei quali è $\rho-\mu$, e mediante le $\rho-\nu+1$ equazioni dedotte dall'equazione (3), ponendovi successivamente invece di m e di n tutti i valori interi la somma

dei quali è $\rho-\nu$. Se $\rho=\mu+\nu-2+s$ abbiamo $\mu+\nu-1+s$ incognite e $\rho-\mu+1+\rho-\nu+1=\mu+\nu+2s-1$ equazioni; quindi s equazioni di più dell'incognite; ma, come vedremo, queste s equazioni, in generale, rientrano nell'altre.

3. Se poniamo

$$(4)\qquad f_1(x,y)=\sum_{s=0}^{s=\mu}\sum_{r=0}^{r=\mu-s}a_{r,s}\,x^{\mu-r-s}y^r=0\,,$$

$$(5)\qquad f_2(x,y)=\sum_{s=0}^{s=\nu}\sum_{r=0}^{r=\nu-s}b_{r,s}\,x^{\nu-r-s}y^r=0\,,$$

e indichiamo con

$$x_1\,,\ y_1\,;\ x_2\,,\ y_2\,;\ x_3\,,\ y_3\,;\ \ldots\ x_{\mu\nu}\,,\ y_{\mu\nu}\,,$$

le radici simultanee dell'equazioni (4) e (5), il termine generale della serie (1) sarà

$$(6)\qquad u_{m,n}=\sum_{t=1}^{t=\mu\nu}c_t x_t^m y_t^n\,,$$

dove i $\mu\nu$ coefficienti c_1, c_2, c_3, . . . $c_{\mu\nu}$ devono determinarsi in modo che sodisfacciano alle $\mu\nu$ equazioni di primo grado che si ottengono ponendo nell'equazione (6) successivamente, per m tutti i valori interi minori di μ e per n tutti i valori interi minori di ν, e invece dei termini $u_{m,n}$ i loro $\mu\nu$ valori che abbiamo supposto esser dati.

È facile a verificarsi che dai valori (6) di $u_{m,n}$ saranno sodisfatte le equazioni (2) e (3) per tutti i possibili valori di m e n; e quindi i $\mu+\nu+s-1$ valori di $u_{m,n}$ che hanno la somma degl'indici eguale a $\mu+\nu-2+s$, sodisfaranno alle $\mu+\nu+2s-1$ equazioni di sopra notate (n.° 2. 3°), e perciò s di queste dovranno essere una conseguenza delle altre, come avevamo avanzato.

Tutto questo vale quando l'equazioni (4) e (5) hanno $\mu\nu$ radici simultanee, come è in generale. Molte volte però le radici medesime sono in numero minore; e allora sono anche in numero minore i termini che nella serie (1) si possono prendere a piacere.

4.° Passiamo ora a determinare la funzione generatrice della serie (1). Siano

$$(7) \qquad X = \alpha_0 x^{\mu\nu} + \alpha_1 x^{\mu\nu-1} + \alpha_2 x^{\mu\nu-2} \ldots + \alpha_{\mu\nu} = 0,$$

$$(8) \qquad Y = \beta_0 y^{\mu\nu} + \beta_1 y^{\mu\nu-1} + \beta_2 y^{\mu\nu-2} \ldots + \beta_{\mu\nu} = 0,$$

l' equazioni finali, la prima risultante dall' eliminazione d'y, la seconda dall'eliminazione d'x tra l'equazioni (4) e (5). È noto che si possono prendere quattro funzioni razionali intere d'x e d'y, M'_1, M'_2, M''_1, M''_2, in modo che si abbia

$$(9) \qquad M'_1 f_1 + M'_2 f_2 = X,$$

$$(10) \qquad M''_1 f_1 + M''_2 f_2 = Y.$$

Jacobi ha osservato ([1]) che, ponendo

$$V = M'_1 M''_2 - M'_2 M''_1; \quad R = \frac{df}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{df}{dx},$$

e distinguendo con due indici r e s posti in basso a V, i valori che prende V per $x = x_r$, ed $y = y_s$; e con la lettera m posta in basso a V, R, X e Y i valori che prendono queste funzioni per $x = x_m$ ed $y = y_m$, si hanno dall'equazioni (9) e (10) le due

$$Vf_1 = M''_2 X - M'_2 Y; \quad Vf_2 = M'_1 Y - M''_1 X,$$

dalle quali, poichè per $x = x_r$ e $y = y_s$ si annullano contemporaneamente f_1 e f_2, si deduce che deve essere necessariamente

([1]) Vedi *Crelle*. Vol. 14.

(11) $$V_{r,s}=o\,;$$

e derivando successivamente rispetto a x e a y le due equazioni (9) e (10), sostituendo nelle derivate $x=x_m$ e $y=y_m$, e formando il determinante

$$\begin{vmatrix} X'_m 0 \\ 0 Y'_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M'_1\frac{df_1}{dx}+M'_2\frac{df_2}{dx}, & M'_1\frac{df_1}{dy}+M'_2\frac{df_2}{dy} \\ M''_1\frac{df_1}{dx}+M''_2\frac{df_2}{dx}, & M''_1\frac{df_1}{dy}+M''_2\frac{df_2}{dy} \end{vmatrix} = V_m R_m,$$

si ottiene

(12) $$V_m R_m = X'_m Y'_m.$$

5.° L'equazioni (11) e (12) servono a dimostrare il seguente teorema

Se svolgiamo in serie ordinata per le potenze decrescenti delle variabili x e y la frazione razionale

(13) $$\frac{PV+QX+SY}{XY}$$

dove P, Q *ed* S *sono polinomi presi in modo che* $PV+QX+SY$ *non contenga nè x nè y inalzate a potenze superiori a* $\mu\nu-1$*; i coefficienti della serie che otterremo saranno i termini di una serie doppia ricorrente.*

Infatti, decomponendo in frazioni semplici la frazione razionale (13), poichè il numeratore è di grado inferiore al denominatore tanto rispetto ad x che ad y, avremo

$$\frac{PV+QX+SY}{XY}=\sum\frac{P_{r,s}V_{r,s}}{X'_r Y'_s(x-x_r)(y-y_s)},$$

e ponendo mente all'equazioni (11) e (12), si otterrà

$$\frac{PV+QX+SY}{XY}=\sum\frac{P_m}{R_m(x-x_r)(y-y_m)},$$

e svolgendo il secondo membro in serie ordinata secondo le potenze discendenti delle variabili,

$$(14)\ \frac{PV + QX + SY}{XY} = \sum \left\{ \Sigma \frac{P_m}{R_m} x_m{}^\alpha y_m{}^\beta \right\} x^{-(\alpha+1)} y^{-(\beta+1)}.$$

È chiaro che i coefficienti delle differenti potenze di x e di y sono della forma (6), e quindi sono i termini di una serie doppia ricorrente, come volevamo dimostrare.

Ora osserviamo che il polimonio $PV+QX+SY$ è di grado inferiore a $\mu\nu$ rispetto a ciascuna delle due variabili x e y; quindi contiene $\mu^2\nu^2$ coefficienti; deve annullarsi per le sostituzioni, $x = x_r$, $y = y_s$ quando r ed s sono differenti; in conseguenza deve sodisfare $\mu\nu(\mu\nu-1)$ condizioni. Dunque non potrà contenere più di $\mu\nu$ coefficienti arbitrarj. Per ottenere questo polinomio, potremo prendere una funzione P razionale e intera d'x e d'y che non contenga più di $\mu\nu$ coefficienti arbitrarj, per esempio, che non contenga potenze d'x superiori a $\mu - 1$ e potenze d'y superiori a $\nu - 1$, o viceversa; moltiplicarla per V, ed eliminare dal prodotto le potenze d'x e d'y maggiori di $\mu\nu - 1$, valendosi dell'equazioni (7) e (8), dalle quali abbiamo

$$x^{\mu\nu+s} = p_s X + q_s\,,\quad y^{\mu\nu+s} = p'_s Y + q'_s\,,$$

dove q_s è un polinomio in x di grado $< \mu\nu$, e q_s' è un polinomio in y di grado $< \mu\nu$.

6.° Data una serie doppia ricorrente (1), si potranno sempre determinare i $\mu\nu$ coefficienti arbitrarj di P in modo che i coefficienti della serie, della quale è funzione generatrice la frazione razionale $\frac{PV + QX + SY}{XY}$, siano i termini della serie (1) medesima. Basterà determinare i $\mu\nu$ coefficienti di P per mezzo delle $\mu\nu$ equazioni di primo grado:

$$P_1 = c_1 R_1\,;\ P_2 = c_2 R_2\,,\ P_3 = c_3 R_3\,;\ \ldots\ P_{\mu\nu} = c_{\mu\nu} R_{\mu\nu}\,;$$

così avremo

$$\frac{PV + QX + SY}{XY} = \Sigma(\Sigma c_\iota x_\iota^\alpha y_\iota^\beta) x^{-(\alpha+1)} y^{-(\beta+1)}.$$

7.° Se P=1, sarà Q=0; S=0; perchè V è di grado $\mu\nu-1$ rispetto a ciascuna delle due variabili x e y; e come ha osservato *Jacobi* [1] avremo nel secondo membro dell'equazione (14) eguali a zero i coefficienti di tutti i termini nei quali $\alpha+\beta<\mu+\nu-2$; perchè V è di grado non maggiore di $2\mu\nu-\mu-\nu$. Se dunque nella serie doppia ricorrente si prendono eguali a zero tutti i $\mu\nu$ termini arbitrarj fuori che $u_{\mu-1,\,\nu-1}$, saranno eguali a zero anche tutti gli altri termini, nei quali la somma degli indici è minore di $\mu+\nu-2r$ la serie avrà per termine generale $\sum\frac{x_m^\alpha y_m^\beta}{R_m}$ e avrà per funzione generatrice la frazione razionale $\frac{V}{XY}$. Questa è la più semplice delle serie doppie ricorrenti che hanno una medesima legge di progressione.

8.° Tra le relazioni più notevoli che le serie doppie ricorrenti hanno colla teorica di due equazioni con due incognite, merita di essere accennato l'uso che può farsene nei due problemi principali; cioè nella determinazione delle funzioni simmetriche delle radici simultanee, e nella risoluzione numerica delle due equazioni medesime.

Se nell'equazione (14) si fa P = R, i coefficienti del secondo membro divengono della forma $\Sigma x_m^\alpha y_m^\beta$, ossia sono le funzioni simmetriche semplici delle radici simultanee dell'equazioni (4) e (5). Determinati i coefficienti dei termini nei quali $\alpha<\mu$, $\beta<\nu$ [2] i $\mu\nu$ termini della serie (1)

(1) Vedi *Crelle.* Vol. 14.

(2) Effettuando lo svolgimento in serie ordinata per le potenze decrescenti di x e d'y, del primo membro dell'equazione (14), quando P = R, e determinando il termine generale di questa serie, si ottiene una formula che esprime in funzione razionale dei coefficienti

che hanno gl'indici rispettivamente eguali ai due esponenti delle radici simultanee, si potranno, per mezzo delle equazioni (2) e (3), determinare tutti gli altri termini della serie medesima, che saranno i valori di tutte le possibili funzioni simmetriche semplici delle radici simultanee dell'equazioni (4) e (5).

9.° Il metodo di *Daniele Bernoulli* per la risoluzione numerica di una equazione, può estendersi, per mezzo delle serie doppie ricorrenti, a due equazioni con due incognite, e si ha il seguente teorema:

Se x e y sono due radici reali simultanee dell'equazioni (4) e (5), tali che il loro prodotto sia maggiore di tutti i prodotti dei moduli delle altre radici simultanee, sarà

$$x_1 = \lim \frac{u_{t,t}}{u_{t-1,t}}, \quad y_1 = \lim \frac{u_{t,t}}{u_{t,t-1}}.$$

Infatti, abbiamo

$$u_{t,t} = \sum_{m=1}^{m=\mu\nu} c_m x^t_m y^t_m, \quad u_{t-1,t} = \sum_{m=1}^{m=\mu\nu} c_m x^{t-1}_m y^t_m,$$

$$u_{t,t-1} = \sum_{m=1}^{m=\mu\nu} c_m x^t_m y_m^{t-1};$$

onde, facendo i due rapporti della prima espressione colla seconda e colla terza, e dividendo sopra e sotto per $(x_1 y_1)^{t-1}$, si trae

delle due equazioni le funzioni simmetriche semplici delle loro radici, la quale, come mostrerò in altra occasione, è analoga a quella di *Waring* che dà le somme delle potenze simili delle radici di una sola equazione.

$$\frac{u_{t,t}}{u_{t-1,t}}=\frac{c_1x_1y_1+\sum_{m=2}^{m=\mu\nu}c_mx_my_m\left(\frac{x_my_m}{x_1y_1}\right)^{t-1}}{c_1y_1+\sum_{m=2}^{m=\mu\nu}c_m\left(\frac{x_my_m}{x_1y_1}\right)^{t-1}y_m},$$

$$\frac{u_{t,t}}{u_{t,t-1}}=\frac{c_1x_1y_1+\sum_{m=2}^{m=\mu\nu}c_mx^t_my'_m\left(\frac{x_my_m}{x_1y_1}\right)^{t-1}}{c_1x_1+\sum_{m=2}^{m=\mu\nu}c_mx_m\left(\frac{x_my_m}{x_1y_1}\right)^{t-1}}.$$

Ora le quantità sotto il segno Σ contengono le potenze $(t-1)^{esime}$ di quantità <1, perchè $x_1\ y_1$ è maggiore dei prodotti dei moduli di tutte le altre radici simultanee; dunque convergeranno verso zero col crescer di t, e avremo

$$x_1=\lim\frac{u_{t,t}}{u_{t-1,t}},\ y_1=\lim\frac{u_{t,t}}{u_{t,t-1}}.$$

10.° Abbiamo anche il seguente teorema, che è analogo a quello che ha trovato *Fourier* ([1]) per le serie ricorrenti semplici.

Se $x_1,\ y_1\ ;\ x_2,\ y_2\ ;\ .\ .\ .\ ;\ x_r,\ y_r,$ sono le radici simultanee dell' equazioni (4) *e* (5), *che hanno i prodotti dei rispettivi moduli maggiori di tutte le altre; ponendo*

([1]) L'enunciato di *Fourier* nell'*Analyse des équations*; pag. 72 è inesatto, come fu avvertito dal prof. *Tardy* (N. A. de *Terquem* 1854 Janvier); ma é stato corretto dal prof. *Brioschi* nei medesimi Annali di *Terquem*. *Année* 1855. pag. 21.

$$A_{m,n} = \begin{vmatrix} u_{m,n} & u_{m+1,n} & \cdots & u_{m+r-1,n} \\ u_{m,n+1} & u_{m+1,n+1} & \cdots & u_{m+r-1,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{m,n+r-1} & u_{m+1,n+r-1} & \cdots & u_{m+r-1,n+r-1} \end{vmatrix}$$

$$A'_{m,n} = \begin{vmatrix} u_{m,n} & u_{m+1,n} & \cdots & u_{m+r-2,n} & u_{m+r,n} \\ u_{m,n+1} & u_{m+1,n+1} & \cdots & u_{m+r-2,n+1} & u_{m+r,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{m,n+r-1} & u_{m+1,n+r-1} & \cdots & u_{m+r-2,n+r-1} & u_{m+r,n+r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$A^{(r-1)}_{m,n} = \begin{vmatrix} u_{m,n} & u_{m+2,n} & \cdots & u_{m+r,n} \\ u_{m,n+1} & u_{m+2,n+1} & \cdots & u_{m+r,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{m,n+r-1} & u_{m+1,n+r-1} & \cdots & u_{m+r,n+r-1} \end{vmatrix}$$

$$'A_{m,n} = \begin{vmatrix} u_{m,n} & u_{m+1,n} & \cdots & u_{m+r-1,n} \\ u_{m,n+1} & u_{m+1,n+1} & \cdots & u_{m+r-1,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{m,n+r-2} & u_{m+1,n+r-2} & \cdots & u_{m+r-1,n+r-2} \\ u_{m,n+r} & u_{m+1,n+r} & \cdots & u_{m+r-1,n+r} \end{vmatrix}$$

$$''A_{m,n} = \left| \begin{array}{l} u_{m,n}\ u_{m+1,n}\ \ldots\ u_{m+r-1,n} \\ u_{m,n+1}\ u_{m+1,n+1}\ \ldots\ u_{m+r-1,n+1} \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ u_{m,n+r-3}\ u_{m+1,n+r-3}\ \ldots\ u_{m+1,n+r-3} \\ u_{m,n+r-1}\ u_{m+1,n+r-1}\ \ldots\ u_{m+1,n+r-1} \\ u_{m,n+r}\ u_{m+1,n+r}\ \ldots\ u_{m+r-1,n+r} \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \end{array} \right|$$

$$^{(r-1)}A_{m,n} = \left| \begin{array}{l} u_{m,n}\ u_{m+1,n}\ \ldots\ u_{m+r-1,n} \\ u_{m,n+2}\ u_{m+1,n+2}\ \ldots\ u_{m+r-1,n+2} \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ u_{m,n+r}\ u_{m+1,n+r}\ \ldots\ u_{m+r-1,n+r} \end{array} \right|$$

le $2r-1$ *serie doppie,*

$$\Sigma A_{m,n}\,,\quad \Sigma A'_{m,n}\,,\quad \Sigma A''_{m,n}\ \ldots\quad \Sigma A^{(r-1)}_{m,n}$$

$$\Sigma' A_{m,n}\,,\quad \Sigma'' A_{m,n}\ \ldots\quad \Sigma^{(r-1)} A_{m,n},$$

saranno ricorrenti, e l'equazioni

$$x^r - \lim \frac{A'_{m,m}}{A_{m,m}}\, x^{r-1} + \lim \frac{''A_{m,m}}{A_{m,m}}\, x^{r-2} - \ldots$$

$$\pm \lim \frac{A_{m,m}^{(r-1)}}{A_{m,m}}\, x \mp \lim \frac{A_{m,m}}{A_{m-1,m}} = 0$$

$$y^r - \lim \frac{'A_{m,m}}{A_{m,m}} y^{r-1} + \lim \frac{A_{m,m}}{A_{m,m}} y^{r-2} - \ldots$$

$$\pm \lim \frac{^{(r-1)}A_{m,m}}{A_{m,m}} \pm \lim \frac{A_{m,m}}{A_{m,m-1}} = 0$$

avranno rispettivamente per radici

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; \ldots \; x_r,$$

$$y_1, \; y_2, \; y_3, \; \ldots \; y_r .$$

Per dimostrare questo teorema, basta osservare che valendosi di alcune proprietà note dei determinanti, ponendo

$$\Delta'_{t_1, t_2, \ldots t_r} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_{t_1} & x_{t_2} & x_{t_3} & \ldots & x_{t_r} \\ x^2_{t_1} & x^2_{t_2} & x^2_{t_3} & \ldots & x_{t_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{r-1}_{t_1} & x^{r-1}_{t_2} & x^{r-1}_{t_3} & \ldots & x^{r-1}_{t_r} \end{vmatrix}$$

$$'\Delta_{t_1, t_2, \ldots t_r} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ y_{t_1} & y_{t_2} & y_{t_3} & \ldots & y_{t_r} \\ y^2_{t_1} & y^2_{t_2} & y^2_{t_3} & \ldots & y^2_{t_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y^{r-1}_{t_1} & y^{r-1}_{t_2} & y^{r-1}_{t_3} & \ldots & y^{r-1}_{t_r} \end{vmatrix}$$

e sostituendo i valori di $u_{m,n}$ dati dalle formule (6) si ottiene, facilmente

$$A_{m,n}=\Sigma c_{t_1} c_{t_2} \dots c_{t_r} \Delta'_{t_1,t_2 \dots t_r} {}'\Delta_{t_1,t_2 \dots t_r} x^m_{t_1} x^m_{t_2} \dots x^n_{t_r} y^n_{t_1} y^n_{t_2} \dots y^n_{t_r},$$

$$A'_{m,m}=\Sigma c_{t_1} c_{t_2} \dots c_{t_r} \Delta'_{t_1,t_2 \dots t_r} {}'\Delta_{t_1,t_2 \dots t_r} x^m_{t_1} x^m_{t_2} \dots x^m_{t_r} y^m_{t_1} y^m_{t_2} \dots y^m_{t_r} (x_{t_1} + x_{t_2} + \dots + x_{t_r}),$$

$$A''_{m,m}=\Sigma c_{t_1} c_{t_2} \dots c_{t_r} \Delta'_{t_1,t_2 \dots t_r} {}'\Delta_{t_1,t_2 \dots t_r} x^m_{t_1} x^m_{t_2} \dots x^m_{t_2} y^m_{t_1} y^m_{t_2} \dots y^m_{t_r} (x_{t_1} x_{t_2} + x_{t_1} x_{t_3} + \dots + x_{t_{r-1}} x_{t_r})$$

. . . .

. . . .

$${}'A_{m,m}=\Sigma c_{t_1} c_{t_2} \dots c_{t_r} \Delta'_{t_1,t_2 \dots t_r} {}'\Delta_{t_1,t_2 \dots t_r} x^m_{t_1} x^m_{t_2} \dots x^m_{t_r} y^m_{t_1} y^m_{t_2} \dots y^m_{t_r} (y_{t_1} + y_{t_2} \dots + y_{t_r}),$$

$${}''A_{m,m}=\Sigma c_{t_1} c_{t_2} \dots c_{t_r} \Delta'_{t_1,t_2 \dots t_r} {}'\Delta_{t_1,t_2 \dots t_r} x^m_{t_1} x^m_{t_2} \dots x^m_{t_r} y^m_{t_1} y^m_{t_2} \dots y^m_{t_r} (y_{t_1} y_{t_2} + y_{t_1} y_{t_3} \dots + y_{t_{r-1}} y_{t_r}),$$

. . . .

. . . .

onde,

$$\lim \frac{A_{m,m}}{A_{m,m}} = x_1 + x_2 + \dots + x_r,$$

$$\lim \frac{A''_{m,m}}{A_{m,m}} = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{r-1} x_r;$$

. . . .

. . . .

$$\lim \frac{'A_{m,m}}{A_{m,m}} = y_1 + y_2 + \ldots + y_r$$

$$\lim \frac{''A_{m,m}}{A_{m,m}} = y_1 y_2 + y_1 y_3 + \ldots + y_{r-1} y_r.$$

. . . .

. . . .

Tutto quello che abbiamo detto intorno alle serie doppie ricorrenti e alle relazioni che esse hanno colle radici dell'equazioni a due incognite, si estende facilmente alle serie triple, quadruple, . . . ricorrenti, e ai sistemi di tre, di quattro equazioni con altrettante incognite. »

Firenze 26 Aprile 1857.

SUR L'INDUCTION ÉLECTROSTATIQUE

QUATRIÈME LETTERE

de

M. P. VOLPICELLI

à

M. V. REGNAULT.

« La modification essentielle et bien connue que Melloni (¹) a apportée à la manière ancienne et commune de concevoir le phénomène très-intéressant de l'induction électrostatique a été admise per les uns, et repoussée par d'autres. Or, comme il me semble que cette modification, au lieu de renverser les principes bien démontrés de l'électrostatique, est plutôt une rectification raisonnable de leur emploi pour bien rendre compte du phénomène indiqué, j'ai l'honneur de vous communiquer dans cette quatrième Lettre (²) quelques réflexions et expériences que j'ai faites

(¹) Tome XXXIX, page 177, séance du 24 juillet 1854.

(²) Pour les trois précédentes Lettres, *voir* tome XL, page 246.

tendantes à prouver la vérité de la nouvelle théorie, qui peut-être n'a pas encore été évidemment démontrée.

« Les réflexions tendant à faire admettre que l'induction électrostatique doit être regardée, non pas comme elle l'a été depuis Canton (1753) jusqu'à nos jours, mais comme l'a conçue Melloni, sont les suivantes:

« 1°. La plupart des physiciens admettent l'existence d'électricité complétement dissimulée dans le disque induit du condensateur; par conséquent on doit aussi l'admettre dans le conducteur isolé et induit, employé communément dans l'expérience pour démontrer le phénomène de l'induction.

« 2.° La *ligne neutre*, selon les auteurs les plus modernes, n'est pas au milieu de l'induit; mais elle est de situation variable et toujours fort près de l'induisante: ainsi M. Morh l'a trouvée distante seulement de 1 centimètre de l'extrémité de l'induit la plus voisine de l'induisant. C'est déjà là une induction pour croire que cette ligne neutre est illusoire.

« 3.° Si l'on admet que l'eletricité induite possède une tension, on est conduit à la conséquence évidemment absurde, que dans un même conducteur isolé coexisteraient les deux électricités contraires, toutes deux douées de tension l'une pour l'autre, sans se pouvoir neutraliser entre elles.

« 4.° En mettant en communication avec le sol une extrémité quelconque de l'induit, toujours l'électricité libre est celle qui fuit, et jamais ce n'est l'induite. Ce phénomène, d'abord observé par Beccaria (1771), n'a jamais été expliqué d'une manière satisfaisante par l'ancienne doctrine, tandis que par la nouvelle il l'est facilement, et avec évidence.

«5.° Il est aisé de démontrer géométriquement que, malgré l'induction, l'électricité libre doit se distribuer suivant une

séance du 29 Janvier 1855;-tome XLI, page 553, séance du 8 octobre 1855;-tome XLIII, page 719, séance du 13 octobre 1856.

certaine loi sur tout le conducteur induit; de sorte que si l'induite possédait une tension, déjà les effets de l' induisante seraient nuls, parce qu'il devrait nécessairement en résulter la neutralisation des deux électricités contraires sur le *même* conducteur.

6.° L'induite ne se dissipe ni ne s' affaiblit point en la faisant communiquer avec le sol, donc elle n'a pas de tension pendant l'induction.

« Mais laissons le raisonnement abstrait, et la défense, des expériences produites par Melloni à l'appui de sa théorie; et exposons, aussi brièvement que possible, quelques autres expériences qui conduiront à la même conclusion.

« *Première expérience* — Si l'on approche de l'extrémité de l'induit, la plus proche de l'induisante, une pointe métallique bien isolée et communiquant avec l'électroscope, et bien défendue de l'induction principale par un écran metallique non isolé, cet électroscope indiquera une tension semblable à l' induisante ; ce qui montre que l'électricité libre se trouve aussi sur cette extrémité.

« Qu'on applique à l'extrémité indiquée plusieurs pointes métalliques, qu'on effectue l'induction qu'on soustraie ensuite l'induit à l'influence et qu'on l'approche d'un électroscope, on aura toujours des indices d'électricité induite devenue libre. Donc, malgré les pointes et l'attraction entre l'induite et l'induisante, il est confirmé que pendant l'induction l'électricité induite ne se dissipe pas, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de tension.

« *Deuxième expérience.* — Moyennant deux fils métalliques, on fait communiquer une extrémité de l'induit avec l' électroscope et l' autre avec le bouton d' une bouteille de Leyde chargée intérieurement de négatif et placée sur un écran isolant. On produit l' induction sur le cylindre métallique, en le tenant en parfaite communication avec le sol. L'électroscope ne donnera aucun signe; mais

si, ayant ôté la communication, c'est-à-dire ayant mis le système induit dans un parfait isolement, on approche une main de l'armature extérieure de la bouteille, aussitôt on obtiendra de l'électroscope des indices d'électricité négative abandonnée de l'interieur de la bouteille, et qui aura parcouru tout l'espace occupé par l'induite sur le cylindre, sans se combiner nullement avec celle-là, et en vainquant la répulsion de l'induisante. En outre, en approchant et en éloignant alternativement la mainde l'armature extérieure de la même bouteille, on verra osciller la feuille d'or de l'éctroscope, c'est-à-dire qu'elle indiquera le parcours en avant et en arrière de l'électricité d'*abandon* le long du cylindre métallique, sans que l'induite puisse neutraliser sur celui-ci une dose, bien que minime, de l'autre qui glisse dessus, laquelle pourra être aussi faible qu'on voudra. De là, nous concluons que pendant l'induction: 1° l'induite n'a de tension que pour l'induisante, et que, par conséquent, elle ne peut ni faire diverger les électromètres, ni induire, ni se neutraliser avec la libre contraire; 2° que la conductibilité n'est pas privée d'effet, même sous l'empire de l'induction répulsive; 3° que l'électricité libre doit se trouver distribuée, même sur l'extrémité de l'induit la plus proche de l'induisante.

« *Troisième expérience.* — A l'extrémité du cylindre métallique isolé et induit la plus proche de l'induisante, on place le bout d'un fil conducteur très-mince, établi perpendiculairement à l'axe du cylindre, que le fil soit suffisament long, bien isolé, et que l'autre bout soit joint à un électroscope. Le premier bout du fil ne doit pas être éloigné de plus d'un demi-millimètre de la surface de l'induit, et doit être lié à un fil de soie par lequel il puisse, quand on voudra, être mis en contact avec l' induit sans communiquer au sol. On produit l'induction sur le cylindre, et par conséquent aussi sur le fil métallique, en maintenant

l'un et l'autre isolés; puis, ayant établi d'abord l'isolement de tous les deux, on met aussitôt le bout du fil métallique en contact avec le cylindre, moyennant le fil de soie, on n'obtiendra de l'électroscope aucun signe d'électricité; d'où il faut conclure que l'électricité induite n'a pas de tension.

« On répète cette expérience, mais pendant l'induction sur le cylindre et sur le fil conducteur on ne tient que celui-ci en communication avec le sol. Puis, ayant produit d'abord l'isolement, on fait ensuite le contact entre le bout du fil et le cylindre: à l'instant, l'électroscope donnera un indice d'électricité libre homologue à l' induisante. Donc l'électricité libre se trouve aussi sur l'extrémité de l'induit la plus proche de l'induisante. En dernier lieu, ayant mis successivement le bout du fil conducteur, en contact, de la manière qui a été exposée, avec les divers points de l'induit isolé, on obtiendra toujours de l'électroscope des signes d' électricité homologue à l' induisante, moindres à l'extrémité la plus proche de celle-ci, et plus grands à l'autre. Donc, pendant l'induction, la *ligne neutre*, voulue par l'ancienne théorie et niée par Melloni, n' existe point sur l'induit; ainsi il n'y a pas sur l'induit deux tensions électriques contraires entre elles, mais une seule.

« *Quatrième expérience.* — Dans un tube métallique AB, suffisamment long, on établit un fil métallique *ab* isolé des parois intérieures du tube ; l'extrémité A de celui-ci est terminée en forme conique, et avec une ouverture circulaire qui n'ait pas plus de 3 ou 4 millimètres de diamètre; l'extrémité *a* du fil intérieur est terminée par un globule fait d'une feuille d'or froissée, et il doit être suffisamment défendu de l'induction principale. En outre, la partie conique du tube AB pourra y glisser en avant et en arrière, afin que l'extrémité *a* puisse être éloignée autant qu'il le faut de l'ouverture circulaire du tube. L'autre extrémité *b* du fil indiqué devra se joindre à un électroscope, et

sera défendue de l'induction moyennant un écran métallique non isolé, avec lequel communiquera aussi le tube. Qu'on fasse en sorte que l' ouverture circulaire du tube AB, soit aussi près que possible de l'extrémité de l'induit la plus proche de l'induisante. Les choses ainsi disposées, on devra d'abord s'assurer que le fil *ab* ne subit aucune induction sensible de la part de l'induisante, ce qu'on vérifiera quand, ayant enlevé l'induit et produit l'induction, on n'aura de l'électroscope aucun indice de tension. Après quoi, ayant remis à sa place l'induit, et en le maintenant en communication avec le sol, l' électroscope ne donnera aucun indice. Donc l'électricité induite n'a pas de tension.

« L'expérience répétée, mais en tenant l' induit isolé, l'électroscope donnera des signes d'électricité homologue à l'induisante. Ensuite, en faisant communiquer l'induit avec le sol, l'électroscope tombera dans l'état naturel par l'ffet du manque d'électricité libre dans l'induit. Donc l'électricité libre se trouve aussi sur l'estrémité de l'induit la plus proche de l'induisante.

« *Cinquième expérience.* — On sait que les manifestations du plan d'épreuve ne sont véritables que quand les dimensions de ce plan sont tellement minces, que celui-ci peut se confondre avec l'élément de la surface sur laquelle on l'applique. Pour cela, un disque métallique ayant un demi-centimètre de diamètre et un quart de millimètre d'épaisseur, fut fixé avec la cire d' Espagne à l'extrémité d'un tube de verre très-fin. Ayant vérifié, avant tout, qu'il n'y avait pas de transport sensible entre l' induit et l' induisante, je touchai avec ce plan d'épreuve le sommet de l'estremité de l'induit la plus proche de l' induisante, et l'électroscope manifesta dans ce plan-là une électricité homologue à l'influente. En outre, j'appliquai l'électromètre à paillettes sur la même extrémité, puis, touchant avec le même plan ces paillettes, *non défendues de l'influence*, l'é-

lectroscope donna la même manifestation. Enfin, ayant porté ce plan-là sur toute la surface de l'induit comprise entre ses extrémités, il y eut toujours manifestation d'électricité homologue à l'induisante. Donc l'électricité induite est sans tension, l'électricité libre est distribuée sur tout l'induit, en plus grande quautité dans son extrémité la plus proche de l'induisante que dans l'autre; et la *ligne neutre* n'existe pas sur l'induit, mais elle est une illusion. Donc la théorie de Melloni est vraie dans toute son étendue.

« En outre, on voit qu' il devra exister un plan d' épreuve de telles dimentions qui, étant appliqué à l'extrémité de l'induit le plus proche de l'induisante, devra donner à l'électroscope une tension nulle.

« En dernier lieu, les deux expériences bien connues, l' une de Wilke et l' autre d' Oepinus, doivent, pendant que dure l'induction, être regardées comme illusoires. Elles ne sont pas vraies non plus quand des deux corps conducteurs et isolés, placés l'un en contact de l'autre, le plus proche de l' induisante déjà réduit très-mince, est soustrait à l'induction; car alors il sera chargé d' électricité homologue à l'induisante, non pas d'électricité induite, contrairement à ce que les auteurs déjà cités conclurent de leurs expériences. »

NUOVO REGISTRATORE METEOROLOGICO

DEL P. BERTELLI BARNABITA

L'importanza delle osservazioni metereologiche esatte e capaci di rappresentare nelle loro variazioni delle curve continue, è assai vivamente sentita da tutti i fisici dei nostri giorni, e per ciò si sono immaginati diversi apparati scriventi, nei quali si fa uso o di semplice azione meccanica, o fotografica, o elettrica. Questi trovati, benchè ingegnosissimi, pure per il soverchio costo, per la molta complicazione del meccanismo, o delle correzioni cui si debbono sottoporre le indicazioni avute, e per difetti spesso non piccoli, che si trovano specialmente in taluni di essi, non possono essere di quel vantaggio ed uso così universale come si desidera onde moltiplicare nella loro esattezza le osservazioni dei fenomeni meteorologici. A questo oggetto il P. D. Timoteo Ma. Bertelli Barnabita in Bologna rivolse i suoi studii, e fece costruire sino dal 1855 un nuovo Registratore metereologico elettro-scrivente, del quale ha avuto sinora l'approvazione dei dotti di questa città e di altri paesi. In questo apparato si fa uso della comune macchina telegrafica di Morse regolata dal pendolo, la quale fa abbassare ad intervalli di tempo eguali una coppia di fili di platino in ciascuno degli istrumenti meteorologici a mercurio. Per mezzo di un particolare congegno somplicissimo, in vece di avere una riga sulla carta telegrafica per indicazione delle altezze variabili degli istrumenti (il che, come si vede in pratica, presenta un attrito variabile, dannoso all'esattezza), non si hanno che dei punti impressi colla velocità della corrente elettrica, e corrispon-

denti alle altezze attuali degli istrumenti con una esattezza assai maggiore di quella che si potesse avere dall'osservazione diretta dei medesimi. Ad ogni indicazione sulla unica carta telegrafica per ogni istrumento vengono segnati tre punti, nei quali la distanza dei due estremi indica uno spazio costante e noto dentro cui sono comprese tutte le variazioni possibili dell'istrumento rispettivo, e la distanza del punto di mezzo da uno degli estremi, l'altezza variabile dell'istrumento medesimo. Questa si può ottenere sulla carta ingrandita a piacimento in modo da avere ancora i dieci millesimi di millimetro; e per mezzo dei tre punti sopra detti si ha, oltre il tempo di ogni osservazione, notata la variazione, se vi è, di allungamento della carta ad ogni cambiamento atmosferico, ed un modo facile di correzione. La quale variazione però, come risulta da esperienze a tal uopo istituite, riesce assolutamente trascurabile, quando si faccia nel corso della giornata qualche osservazione diretta dell'Istrumento. Quanto al Termometro, l'Autore, dietro esperienze da lui fatte e giudicate decisive da persone ragguardevoli, ha fatto uso di tubi aperti, avendo trovato che nei termometri chiusi la pressione atmosferica sul bulbo fa variare sino a due gradi l'altezza termometrica. Nel modo ora descritto vengono segnate sulla stessa carta contemporaneamente le indicazioni del Barometro, Termometro, Psicrometro, Udometro, Anemometro e Sismometro; questi ultimi due istrumenti però hanno un congegno particolare e molto semplice. Sul modello, che l'Autore ha fatto costruire della sua Macchina, ha già eseguito parecchie esperienze, dietro le quali darà una descrizione del medesimo, col desiderio di conoscere il giudizio dei dotti, ben persuaso che il progresso delle scienze fisiche segue il tempo, e l'osservazione di molti.

SULLA TRASFORMAZIONE DELLE FUNZIONI ELLITTICHE

NOTA

DEL PROF. F. BRIOSCHI

1.° Il problema della trasformazione delle funzioni Ellittiche, forse il principale nella teorica di questi trascendenti, formò ripetutamente soggetto, sotto punti di vista differenti, alle ricerche degli insigni geometri Abel, Jacobi, Eisenstein, Hermite, Rosenhain —. In una delle lettere indirizzate dal sig. Hermite a Jacobi e pubblicate nella raccolta dei lavori di quest' ultimo trovasi risoluto questo problema (oltre a quello della divisione) partendo dalle proprietà delle serie doppiamente infinite, da rapporti delle quali si esprimono le funzioni inverse degli integrali Ellittici. Nelle due recenti ricerche sulla trasformazione delle funzioni Abeliane di prima specie, il sig. Hermite oltre al giovarsi delle proprietà di queste serie, introdusse nella quistione un nuovo importantissimo elemento coll' osservare, che il problema della trasformazione consistendo nell'esprimere funzioni inverse, di moduli differenti razionalmente le une per le altre, dovevano gli indici di periodicità delle prime essere funzioni lineari a coefficienti intieri degli indici di periodicità delle seconde. Assumendo questa proprietà quale fondamento abbiamo in questa nota applicato il metodo del sig. Hermite alla trasformazione delle funzioni Ellittiche; e ciò non solo allo scopo di mostrare con quanta semplicità si giunga alle note formole di Jacobi o di Abel; ma ben anco e principalmente per aprirci la via a contemplare la soluzione dell'analogo problema per le funzioni Abeliane.

2.° Considerando la serie doppiamente infinita:

$$(1) \qquad P(u) = S\,(-1)^{mp}\; e^{(2m+\mu)ra(2u+(2m+\mu)a)}$$

nella quale p, μ sono eguali a zero od all'unità, ed m assume tutti i valori numerici intieri da $-\infty$ a $+\infty$; si hanno come è noto le:

$$P(u+2a) = (-1)^p e^{-4ra(u+a)} P(u) , \quad P(u+2b) = (-1)^\mu P(u)$$

essendo $b = \frac{i\pi}{4ar}$. Pongasi:

$$v = \frac{2rua}{i\pi} \quad , \quad c = \frac{4ra^2}{i\pi} = \frac{a}{b}$$

la (1) si trasformerà nella:

$$(2) \qquad \Theta(v) = S(-1)^{mp} e^{i\pi(2m+\mu)v + \frac{i\pi}{4}(2m+\mu)^2 c}$$

per la quale analogamente alle superiori si avranno le:

$$(3) \quad \Theta(v+1) = (-1)^\mu \Theta(v) \quad , \quad \Theta(v+c) = (-1)^p e^{-i\pi(2v+c)} \Theta(v)$$

alle quali possiamo aggiungere la:

$$\Theta(-v) = (-1)^{\mu p} \Theta(v)$$

Così indicando con Q (u) la serie doppiamente infinita:

$$S(-1)^{mq} e^{(2m+\nu)\rho\alpha(2u+(2m+\nu)\alpha)}$$

e ponendo:

$$\beta = \frac{i\pi}{4\alpha\rho} \quad , \quad v = \frac{2\rho u\alpha}{i\pi} \quad , \quad \gamma = \frac{4\rho\alpha^2}{i\pi} = \frac{\alpha}{\beta}$$

ottiensi la trasformata:

$$(4) \qquad \theta(v) = S(-1)^{mq} e^{i\pi(2m+\nu)v + \frac{i\pi}{4}(2m+\nu)^2 \gamma}$$

per la quale sussisteranno le:

$$(5) \quad \begin{aligned} &\theta(v+1) = (-1)^\nu \theta(v) \quad , \quad \theta(v+\gamma) = (-1)^q e^{-i\pi(2v+\gamma)} \theta(v) \\ &\theta(-v) = (-1)^{\nu q} \theta(v). \end{aligned}$$

Ora se voglionsi esprimere le funzioni P (u) razionalmente per le Q(u), dovranno necessariamente aver luogo le relazioni lineari a coefficienti intieri:

$$\alpha = a_1 a + b_1 b$$
$$\beta = a_2 a + b_2 b$$

e quindi:

(6)
$$\gamma = \frac{a_1 c + b_1}{a_2 c + b_2}$$

3.° Si consideri una funzione $\Pi(v)$ definita dalle seguenti equazioni:

$$\Pi(v+1) = (-1)^{\delta}\Pi(v) \;,\; \Pi(v+\gamma) = (-1)^{h} e^{-i\pi n(2v+\gamma)}\Pi(v)$$

(7)
$$\Pi(-v) = (-1)^{\delta h}\Pi(v)$$

essendo n un numero dispari; δ, h eguali a zero od all'unità. Questa funzione potrà esprimersi in tutta la generalità per la serie doppiamente infinita ([1]):

$$\mathrm{S}(-1)^{mh} A_m \, e^{i\pi(2m+\delta)v + \frac{i\pi}{4n}(2m+\delta)^2 \gamma}$$

nella quale A_m è un coefficiente indeterminato. Ma per la seconda e la terza delle (7) si hanno le:

$$A_{m+n} = A_m \qquad\qquad A_{-m-\delta} = A_m$$

dalle quali:

$$A_{m-\delta} = A_{n-m} \,;$$

quindi tutti i coefficienti A_m pei quali $m > n-1$ saranno esprimibili per gli n seguenti:

$$A_0 \,,\; A_1 \,,\; \ldots \; A_{n-1}$$

e fra questi avranno luogo le relazioni:

$$A_{1-\delta} = A_{n-1} \;,\; A_{2-\delta} = A_{n-2} \; \ldots \; A_{\frac{n-1}{2}-\delta} = A_{\frac{n+1}{2}}$$

per cui non ne rimarranno indipendenti che un numero $\frac{n-1}{2}$. Abbiamo così il:

([1]) Weierstrass. Tehoríe der Abel'schen Functionen. Crelle. Journal für die Mathematik. Band. 52 f.e 365.

Teor.ª 1.° L'espressione la più generale della funzione $\Pi(v)$ definita dalle equazioni (7) contiene $\frac{n+1}{2}$ coefficienti indipendenti.

Operando come sopra potrebbesi dimostrare, ciò che d'altronde è noto che le quattro funzioni Jacobiane $\theta(v)$ colle quali si esprimono le funzioni inverse delle ellittiche sono algebricamente riducibili a due di esse; e che fra queste non può sussistere alcuna relazione algebrica.

Indichiamo con $\theta_0(v)$, $\theta_1(v)$ queste due funzioni e con ν_0, q_0; ν_1, q_1 i valori delle ν, q per le medesime. Si consideri una funzione omogenea del grado n di $\theta_0(v)$, $\theta_1(v)$; essa verrà espressa linearmente da prodotti della forma $\theta_0^a\,\theta_1^b$; dove a, b sono numeri intieri ed $a+b=n$. Pongasi :

$$\Pi(v) = \Sigma\, B\theta_0^a\,\theta_1^b$$

essendo B un coefficiente costante; osservando le (5) si avranno evidentemente le:

$$\Pi(v+1) = (-1)^{a\nu_0+b\nu_1}\,\Pi(v)$$

per cui la funzione $\Pi(v)$ sarà definita dalle equazioni (7) allorquando sussistano le :

$$a\nu_0+b\nu_1 \equiv \delta \quad aq_0+bq_1 \equiv h \quad a\nu_0q_0+b\nu_1q_1 \equiv \delta h \pmod{2}.$$

Supponiamo dapprima $\delta=\nu_0$, $h=q_0$ ed indichiamo con $\Pi_0(v)$ la funzione che corrisponde a quei valori di δ, h. Affinchè le congruenze superiori sieno soddisfatte dovranno essere: $a\equiv 1$, $b\equiv 0$ (mod. 2); quindi :

$$(8) \quad \Pi_0(v) = B_0\theta_0^n + B_1\theta_0^{n-2}\,\theta_1^2 + \ldots + B_{\frac{n-1}{2}}\,\theta_0\theta_1^{n-1}$$

e supponendo in secondo luogo $\delta=\nu_1$ $h=q_1$ ed indicando con $\Pi_1(v)$ la funzione corrispondente; si avranno le $a\equiv 0$, $b\equiv 1$ (mod. 2) per cui :

$$(9) \quad \Pi_1(v) = C_0\theta_0^{n-1}\theta_1 + C_1\,\theta_0^{n-3}\theta_1^3 + \ldots + C_{\frac{n-1}{2}}\,\theta_1^n.$$

Queste due espressioni delle funzioni $\Pi_0(v)$, $\Pi_1(v)$ contenendo sì l'una che l'altra $\frac{n+1}{2}$ coefficienti indipendenti sono pel teorema 1° le più generali che le funzioni stesse ammettano.

4.° Ciò posto si osservi che fatto per brevità $s = a_2 c + b_2$ cambiando nella funzione Jacobiana $\Theta(v)$ la v in sv ottiensi facilmente :

$$(10) \quad e^{i\pi a_2 s(v+1)^2} \Theta[s(v+1)] = (-1)^{\delta} e^{i\pi a_2 sv^2} \Theta(sv) ;$$

essendo:

$$\delta = pa_2 + \mu b_2 + a_2 b_2 .$$

ed analogamente giungesi alla :

$$e^{2i\pi a_1 sv + i\pi a_1 s\gamma} \Theta[s(v+\gamma)] = (-1)^{h} \Theta(sv)$$

nella quale :

$$h = pa_1 + \mu b_1 + a_1 b_1 .$$

Ora supponendo:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = n$$

si ha :

$$a_1 s = n + a_2 s\gamma$$

per cui sostituendo e moltiplicando per $e^{i\pi a_2 sv_2}$ si ha :

$$(11) \quad e^{i\pi a_2 s(v+\gamma)^2} \Theta[s(v+\gamma)] = (-1)^{h} e^{-i\pi n(2v+\gamma)} e^{i\pi a_2 sv^2} \Theta(sv).$$

Da ultimo essendo :

$$\Theta(-sv) = (-1)^{\mu p} \Theta(sv)$$

osservando che per essere n dispari, dovranno essere p. e. $\delta \equiv \mu b_2$ $h \equiv pa_1$ (mod. 2) per cui $\delta h \equiv \mu p$ (mod. 2) si avrà :

$$(12) \qquad e^{i\pi a_2 sv^2} \Theta(-sv) = (-1)^{\delta h} e^{i\pi a_2 sv^2} \Theta(sv) .$$

Le equazioni (10) (11) (12) dimostrano che la funzione :

$$\Pi(v) = e^{i\pi a_2 s v^2} \Theta(sv)$$

è definita dalle equazioni (7) e quindi per essa varranno le proprietà enunciate nel Teor.ª 1° e nelle equazioni (8) (9). Cioè indicando con Θ_0, Θ_1 due fra le funzioni $\Theta(v)$ e con μ_0, p_0; μ_1, p_1 i valori delle μ, p corrispondenti ad esse e supponendo :

$$(13) \quad \begin{matrix} p_0 a_2 + \mu_0 b_2 + a_2 b_2 \equiv \nu_0 & p_1 a_2 + \mu_1 b_2 + a_2 b_2 \equiv \nu_1 \\ p_0 a_1 + \mu_0 b_1 + a_1 b_1 \equiv q_0 & p_1 a_1 + \mu_1 b_1 + a_1 b_1 \equiv q_1 \end{matrix} \quad (\text{mod.}2)$$

si avranno le :

$$(14) \left\{ \begin{aligned} & e^{i\pi a_2 s v^2} \Theta_0(sv) = B_0 \theta_0^n + B_1 \theta^{n-2} \theta_1^2 + \ldots + B_{\frac{n-1}{2}} \theta_0 \theta_1^{n-1} \\ & e^{i\pi a_2 s v^2} \Theta_1(sv) = C_0 \theta_0^{n-1} \theta_1 + C_1 \theta_0^{n-3} \theta_1^3 + \ldots + C_{\frac{n-1}{2}} \theta_1^n . \end{aligned} \right.$$

5.° Per determinare i valori dei coefficienti B_0, B_1 . . . C_0, C_1 . . . faremo uso di alcune note proprietà delle funzioni Jacobiane. A ciò supponiamo :

$$\begin{matrix} \mu_0 = p_0 = 1 & \nu_0 = q_0 = 1 \\ \mu_1 = 0 , \; p_1 = 1 & \nu_1 = 0, \; q_1 = 1 ; \end{matrix}$$

le equazioni (13) daranno :

$$\begin{matrix} a_2 + b_2 + a_2 b_2 \equiv 1 & a_2 + a_2 b_2 \equiv 0 \\ a_1 + b_1 + a_1 b_1 \equiv 1 & a_1 + a_1 b_1 \equiv 1 \end{matrix} \quad (\text{mod.}2)$$

per le quali a_1, b_2 dispari; b_1 pari ed a_2 pari o dispari. Le (3) daranno :

$$\begin{matrix} \Theta_0(v + 1) = - \Theta_0(v) & \Theta_1(v + 1) = \Theta_1(v) \\ \Theta_0(v + c) = - e^{-i\pi(2v+c)} \Theta_0(v) & \Theta_1(v + c) = - e^{-i\pi(2v+c)} \Theta_1(v) \\ \Theta_0(- v) = - \Theta_0(v) & \Theta_1(- v) = \Theta_1(v) \end{matrix}$$

per le quali indicando con η, ρ due numeri intieri :

$$\Theta_0(\eta + \rho c) = 0.$$

Inoltre si hanno le :

$$\theta_0\left(v+\frac{\gamma}{2}\right)=-e^{-i\pi\left(v+\frac{\gamma}{4}\right)}\theta_1(v)\ ,\ \theta_1\left(v+\frac{\gamma}{2}\right)=e^{-i\pi\left(v+\frac{\gamma}{4}\right)}\theta_0(v)$$

e :

$$e^{i\pi\frac{a}{2}s\left(v+\frac{\gamma}{4}\right)^2}\Theta\left[s\left(v+\frac{\gamma}{2}\right)\right]=t\,e^{-i\pi n\left(v+\frac{\gamma}{4}\right)}e^{i\pi\frac{a}{2}sv^2}\Theta_0(sv)$$

essendo :

$$t=(-1)^{\frac{a_1+b_1+a_1b_1-1}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}a_1b_1}.$$

Ora se nella seconda delle equazioni (14) cambiasi la v in $v+\frac{\gamma}{2}$ ottiensi, per le ultime equazioni superiori; la seguente:

$$t\,e^{i\pi\frac{a}{2}sv^2}\Theta_0(sv)=C_0\theta_1^{n-1}\theta_0+C_1\theta_1^{n-3}\theta_0^3+\ldots+C_{\frac{n-1}{2}}\theta_0^n$$

la quale posta a confronto colla prima delle equazioni (14) stesse dimostra essere :

$$C_{\frac{n-1}{2}}=tB_0\quad,\quad C_{\frac{n-3}{2}}=tB_1\ \ldots\ C_0=tB_{\frac{n-1}{2}}$$

per cui la seconda delle (14) assumerà la forma :

$$e^{i\pi\frac{a}{2}sv^2}\Theta_1(sv)=t\left(B_{\frac{n-1}{2}}\theta_0^{n-1}\theta_1+B_{\frac{n-3}{2}}\theta_0^{n-3}\theta_1^3+\ldots+B_0\theta_1^n\right).$$

Ne risulta che posto $\frac{\theta_0(v)}{\theta_1(v)}=\psi(v)$ si hanno le due equazioni:

$$(15)\begin{cases} e^{i\pi\frac{a}{2}sv^2}\Theta_0(sv)=\theta_1^n\psi(v)\left(B_0\psi^{n-1}(v)+B_1\psi^{n-3}(v)+\ldots+B_{\frac{n-1}{2}}\right) \\ e^{i\pi\frac{a}{2}sv^2}\Theta_1(sv)=t\,\theta_1^n\left(B_{\frac{n-1}{2}}\psi^{n-1}(v)+B_{n-3}\psi^{n-3}(v)+\ldots+B_0\right)\end{cases}$$

(sarà continuato)

Pavia Marzo 1857.

SOPRA IL VOLUME DELLA PIRAMIDE TRIANGOLARE

NOTA

DEL CAV. FAA' DI BRUNO

L'espressione del volume l'una piramide triangolare data dal sig. Sylvester nel Philosopical Magazine 1852 si può trovare più facilmente sotto altra forma nel modo seguente. Notando con V il volume, e con $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, $(x_3 y_3 z_3)$, $(x_4 y_4 z_4)$ le coordinate ortogonali dei 4 vertici si ha la formola nota :

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

ovvero, sottraendo le linee due a due :

$$6V = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix}.$$

Poniamo ora :

$$p = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) + (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)$$
$$q = (x_1 - x_2)(x_1 - x_4) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_4) + (z_1 - z_2)(z_1 - z_4)$$
$$r = (x_1 - x_3)(x_1 - x_4) + (y_1 - y_3)(y_1 - y_4) + (z_1 - z_3)(z_1 - z_4)$$

lato (12) $= a$, lato (13) $= b$, lato (14) $= c$

lato (34) $= a'$ lato (24) $= b'$ lato (23) $= c'$

si avrà

$$36V^2=\begin{vmatrix} a^2 & p & q \\ p & b^2 & r \\ q & r & c^2 \end{vmatrix}$$

Ma si troverà facilmente :

$$p=\tfrac{1}{2}\,[a^2+b^2-c'^2]$$
$$q=\tfrac{1}{2}\,[a^2+c^2-b'^2]$$
$$r=\tfrac{1}{2}\,[b^2+c^2-a'^2]\,;$$

epperciò

$$288V^2=\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-c'^2 & a^2+c^2-b'^2 \\ a^2+b^2-c'^2 & 2b^2 & b^2+c^2-a'^2 \\ a^2+c^2-b'^2 & b^2+c^2-a'^2 & 2c^2 \end{vmatrix}$$

La formola di Cayley, a cui invece il Sylvester arriva, sarebbe :

$$288V^2=\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 & 1 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 & 1 \\ c'^2 & b'^2 & a'^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Mi pare che la precedente sia più simmetrica, mnemonica e più comoda pel calcolo.

Torino 2 Aprile 1857.

NECROLOGIA

Nel 23 Maggio 1857 cessò di vivere *Agostino Luigi Cauchy* Membro dell'Accademia Imperiale delle Scienze di Parigi. Il gran Geometra si trovava nel sessantottesimo anno di sua vita toltagli da brevissima malattia. L'Esercizio più scrupoloso di tutte le virtù cristiane specialmente diretto al bene del suo prossimo, le grandi scoperte in tutte le parti delle Matematiche pure, ed applicate provenienti dalla sua straordinaria intelligenza resero queste uomo ammirabile a tutta l'Europa. Le Opere pubblicate dal medesimo sono cognite ai geometri e la sua carriera scientifica contava più di cinquantadue anni. Le Memorie, le note, gli articoli, i rapporti sparsi nelle differenti collezioni scientifiche, e specialmente nei *Comptes Rendus* sono innumerevoli. Il *Cauchy* nei scorsi anni ci dava una speranza, che non si è realizzata, cioè la pubblicazione d'un Trattato di Meccanica molecolare: a fronte di questo trattato si avea da porre il numeroso Catalogo di tutte le Opere, Memorie, note da esso pubblicate (*).

Il *Cauchy* deve aver lasciato un gran numero di Memorie inedite, ed alcune di esse presentate già all'Accademia delle Scienze da molti anni a questa parte. Io non dubito che l'Accademia medesima sempre intenta all'avanzamento delle scienze vorrà presto collocarle fra i volumi delle sue Memorie, e si conoscerà sempre più quanto grande, ed irreparabile sia stata la perdita di questo uomo, che al suo alto sapere congiungeva un' esattissima osservanza di tutti i suoi doveri Cristiani. Io penso di non poter terminar meglio il breve cenno dato del *Cauchy* se non col ripetere

le stesse parole, che il medesimo diceva di *Ampère* alla fine di una sua lunga Memoria litografica pubblicata a Praga nell'Agosto 1836 *sur la thèorie de la Lumière*, qual Memoria io conservo diligentemente come una delle prime gentilmente donatemi dall'Autore, da che fu da me conosciuto in Roma nel 1832. Il *Cauchy* adunque alla pag. 96. ed ultima di questa Memoria dice che alcuni risultati sulla teoria della luce erano stati già da esso comunicati a M.r *Ampère* « qui après avoir sur la terre par ses importantes » découvertes dans plusieurs branches des connaissances hu- » maines, montré jusqu'où peuvent atteindre les ressources » de l'analyse, et les méditations de la science, est allé dans » une meilleure patrie contempler la beauté suprême de » ce Dieu devant lequel s'abaissait son puissant génie, et » se plonger avec délices dans la vive et douce lumière » de l'Eternelle Vérité. » B. T.

(*) Il compilatore di questo catalogo è il P. *Jullien* della Compagnia di Gesù, giovane geometra assai distinto, ed Autore dell' interessante Opera tanto per gli allievi, quanto i professori sotto il titolo *Problèmes de Mécanique* vol. 2. in 8°. Paris 1855. Chez Bachelier Il P. *Jullien* è presentemente studente di Sacra Teologia in Collegio Romano ed avanti la sua partenza da Parigi avea consegnato al sig. Bachelier il nominato Catalogo per la stampa. Mi sia permesso qui di fare un'osservazione relativa alle tre diverse Catedre da me occupate per l' insegnamento in Roma. Alcuni dotti stranieri miei amici confondendo forse *Università Romana* con *Collegio Romano* credono che io sia Professore in questo. Il Collegio Romano si chiama anche *Università Gregoriana*: le pubbliche scuole di questa Università sono affidate ai P. Gesuiti esclusivamente, e non appartenendo io a questo Ordine Religioso non posso occupare in quella alcuna Catedra. Io sono Professore *nel Collegio Urbano* celebre Collegio detto di *Propaganda-Fide*, e fondato da Papa Urbano VIII per le Missioni Cattoliche nei paesi esteri. In qualche circostanza, il titolo di Professore al Collegio Urbano di Propaganda-Fide é stato cangiato in Collegio Romano della Propagazione della Fede, come pure per l'Università Romana della Sapienza, si é detto *Collegio Romano della Sapienza.* Infine il Pontificio Seminario Romano nel quale anche son Professore é sotto la cura immediata dell' Emo Cardinal Vicario *pro tempore.* Le scuole di questo Seminario sono affidate ad Ecclesiastici secolari, cioè non spettanti a speciali Religiose corporazioni.

LE DUE COMETE DEL 1857

NOTA

DEL PROFES. IGNAZIO CALANDRELLI.

direttore dell'osservatorio astronomico
della romana università.

1.° La prima di queste comete fu scoperta dal signor *D' Arrest* nel giorno 22 Feb; l'altra dal sig. *Bruhns* nel giorno 18 Marzo. La prima sembra del tutto nuova e non mai osservata: l' altra è identica a quella che si vide nel 1846 scoperta dal sig. *Brorsen* nel giorno 25 Feb. di detto anno.

2.° Poco può dirsi sulle apparenze di queste due comete telescopiche: una piccola nebulosità non ben terminata: non deciso il nucleo: benchè ambedue osservate nelle vicinanze dei loro perieli, nulladimeno non si è veduta traccia alcuna di coda: qualche sera sembrava che la luce fosse più viva; ciò accadeva quando dopo una dirotta pioggia, l' aere diveniva purissimo: in questa sola circostanza nella prima, e non mai nell'altra, si distingueva un punto luminoso nel centro della nebulosità che la circondava. Sembra dunque che la periodica di *Brorsen* siasi nel terzo periodo mostrata, quale si osservò nel primo suo apparire nel Feb. del 1846, piccolissima cioè, e di luce debole, come viene descritta da quelli che l'osservarono.

3.° Riguardo alla cometa d'*Arrest* debbo notare che osservata da me nel crepuscolo matutino del giorno 13 Marzo t. civile, la vidi colle apparenze di sopra indicate. Nella

sera però del giorno 16 prima delle ore 8 vedeva nel campo dello stromento due ben distinte, e separate nebulosità. Sospettai sul principio che la cometa si fosse separata, come già accadde a quella di *Biela*. In quella sera confrontai la cometa colla 9 *di andromeda*: nella mattina del 17 vidi che sul globo vicino alla 13 *di andromeda* era notato un ammasso o (*cluster*). Questo è stato descritto dal P. *Secchi* col nome di *nebulosa planetaria di andromeda* di AR = $23.^h$ $18;^m$ D = 41.° 36′ (a). Il campo del mio stromento abbraccia tre buoni semidiametri solari: la cometa aveva $23.^h$ 19^m di AR, e 41.° 10′ di declinazione; quindi potei facilmente spiegare le due nebulosità da me osservate. Una osservazione di Altona del giorno 16 Marzo poco dopo le 8 fissa AR cometa = $23.^h$ $19.^m$ $59;^s$ D = 41.° 11′ e si doveva osservare lo stesso fenomeno, se il campo dello stromento era come il mio.

4.° Le regolari osservazioni della prima cometa ebbero principio nel giorno 13 marzo: dell'altra nel giorno 28 dello stesso mese. Non ho trascurata diligenza alcuna nelle osservazioni e nel calcolo delle medesime. In alcuni giorni la cometa si paragonava a diverse stelle, la cui posizione media si prendeva nel catalogo di *La-lande*, e si riduceva all' apparente pel giorno delle osservazioni: nulladimeno le posizioni della cometa differiscono: l'appulso della cometa al filo orario era unico: quindi l'errore poteva nascere o dal prendere gli appulsi delle stelle allo stesso filo, o dalla media posizione delle medesime. Nel giorno 9 aprile una piccola stella 7391 *La-lande* era nel parallelo della cometa di *Arrest*, e nel giorno 19 aprile la *β del toro* era anche sul parallelo della stessa cometa. Nel giorno 5 aprile la 1025 *C.B* era nel parallelo della cometa di *Bruhns*, e nel

(a) Descrizione del nuovo osservatorio del collegio romano. Tav. IV, fig. 4.

giorno 9 aprile la 40 *Perseo* si trovava sul parallelo della stessa cometa.

5.° Presento nelle due seguenti tavole le posizioni apparenti delle due comete osservate nel nuovo pontificio osservatorio della romana università eretto sulla torre orientale del colle capitolino.

Latitudine 41.° 53.′ 34.″ 34 N
Longitud.... 0.^{h}49.^{m} 55.^{s} 51 Est da Greenw.

Posizioni apparenti della cometa di Arrest

TAVOLA I.

Temp. med. a Roma 1857	AR apparente	Declinaz. app.	Stelle di confronto
		+	
Marzo			
12. 710162	22.h50.m 2.s420	38.°20.′ 6.″50	La-lande 45071
....	22. 50. 3. 600	....	La-lande 45099
16. 326411	23. 19. 46. 010	41. 10. 4. 00	9 Androm. C. B
17. 306736	23. 29. 12. 280	41. 58. 44. 43	ι Androm. C. B
19. 706157	23. 53. 55. 130	....	La-lande 47104
....	23. 53. 55. 840	43. 48. 1. 43	La-lande 47121
28. 351956	1. 43. 29. 400	46. 15. 5. 56	La-lande 3340
Aprile			
3. 378309	3. 0. 4. 360	43. 56. 12. 25	χ Perseo C. B
4. 363330	3. 11. 26. 801	43. 12. 39. 31	30 Perseo C. B
5. 349970	3. 23. 28. 647	42. 18. 49. 85	La-lande 6382
....	3. 23. 28. 657	....	La-lande 6428
7. 329492	3. 43. 21. 183	40. 13. 26. 30	La-lande 7080
8. 345576	3. 52. 40. 899	39. 41. 47. 62	ε Perseo C. B
....	3. 52. 39. 463	39. 41. 49. 58	La-lande 7305
....	3. 52. 41. 288	....	La-lande 7346
....	3. 52. 40. 634	....	La-lande 7369
9. 340313	4. 1. 38. 361	38. 41. 50. 08	La-lande 7255
....	4. 1. 39. 395	....	La-lande 7293
....	4. 1. 39. 093	38. 41. 56. 07	La-lande 7391
....	5. 1. 40. 049	....	La-lande 7451
15. 345243	4. 47. 7. 422	32. 31. 33. 90	ι Auriga C. B
19. 346637	5. 10. 4. 010	28. 29. 5. 47	La-lande 9827
....	5. 10. 4. 744	28. 29. 7. 79	La-lande 10013
....	5. 10. 4. 242	....	La-lande 10026
....	5. 10. 4. 717	28. 29. 8. 24	β Toro C. B
21. 348448	5. 20. 0. 672	....	La-lande 10348
....	5. 20. 0. 111	26. 33. 26. 17	La-lande 10401
....	5. 20. 0. 322	....	La-lande 10432
....	5. 20. 0. 230	26. 33. 29. 33	1754 C. B
29. 375140	5. 51. 51. 151	19. 3. 9. 78	La-lande 11299 dub.

Posizioni apparenti della cometa di **Bruhns**

TAVOLA II.

Temp. med. a Roma 1857	AR apparente	Declinaz. app.	Stelle di confronto	
		+		
Marzo				
28. 333044	2.^{h} 38.^{m}33.^{s}185	18.° 59.′ 43.″38	La-lande	5149
28. 339834	2. 38. 35. 530	....	μ Ariete	C. B
Aprile				
4. 347708	3. 5. 14. 562	27. 21. 14. 43	La-lande	5808
5. 330000	3. 9 12. 000	28. 31. 45. 09	1025	C. B
8. 322454	3. 21. 24. 230	32. 16. 15. 57	La-lande	6344
....	3. 21. 28. 330	32. 16. 24. 81	La-lande	6733
....	3. 21. 26. 590	....	38 Perseo	C. B.
9. 321236	3. 25. 42. 850	....	La-lande	6597
....	3. 25. 42. 450	33. 30. 22. 78	La-lande	6690
....	3. 25. 43. 040	33. 30. 19. 57	40 Perseo	C. B
15. 321447	3. 54. 21. 937	41. 5. 58. 91	La-lande	7612
....	3. 54. 23. 862	....	La-lànde	7683
....	3. 54. 20. 854	....	La-lande	7839
....	3. 54. 22. 871	....	1320	C. B
16. 369432	3. 59. 55. 041	42. 15. 57. 76	La-lande	7560
....	3. 59. 55. 318	42. 15. 50. 54	La-lande	7568
17. 324962	4. 5. 22. 010	43. 37. 12. 12	La-lande	7915
....	4. 5. 21. 692	43. 37. 11. 71	La-lande	7929
18. 326318	4. 11. 15. 533	44. 53. 53. 15	La-lande	8015
19. 332197	4. 17. 17. 709	....	La-lande	8248
....	4. 17. 14. 485	46. 6. 59. 62	La-lande	8354
....	4. 17. 15. 185	....	La-lande	8492
....	4. 17. 14. 518	46. 6. 54. 85	La-lande	8615
21. 329904	4. 30. 21. 248	48. 32. 46. 43	1477	C. B.
25. 378588	5. 1. 6. 321	53. 14. 55. 18	La-lande	9705

Elementi parabolici della cometa di Arrest.

6.° Il Profess. Ottaviano *Astolfi* sostituto alla cattedra di Ottica e di Astronomia nella romana università ha calcolati col metodo di *Le-gendre* gli elementi parabolici di questa cometa colle seguenti osservazioni.

1857 Marzo 6 693044 t. m. a Parigi

$$\text{Long. } G = 349.^{\circ}\ 16.'\ 39.''\ 23$$
$$\text{Lat. } b = +\ 40.\ \ 3.\ \ 24.\ \ 48$$

Marzo 11. 495648

$$G^{\circ} = 359.\ 13.\ 16.\ 85$$
$$b^{\circ} = 41.\ \ 6.\ 10.\ 58$$

Marzo 16. 298252

$$G' = 10.\ 48.\ 18.\ 86$$
$$b' = 41.\ \ 0.\ 36.\ 19$$

Posizione eliocentrica della terra per lo istante della media osservazione

$$T^{\circ} = 171.^{\circ}\ 23.'\ 13.''\ 81$$
$$\log. R^{\circ} = 9.\ 9974875$$

Le prime due osservazioni sono del D. *Donati* aggiunto nell' osservatorio di Firenze; l'altra é nell' elenco delle mie osservazioni. Le posizioni non sono state corrette dell' aberrazione e della parallasse. Dal calcolo ottenne

Pass. al perielio. 1857 Marzo 21. 188892 t. m. a Parigi.

$$\left.\begin{array}{l}\Pi = 73.^{\circ}45.'24.''25 \\ \Omega = 312.\ 38.\ 20.\ 12\end{array}\right\}\text{ eq. med. del 11 Marzo}$$
$$i = 88.\ \ 1.\ \ 0.\ 64$$

$$\log. q = 9.\ 8887568$$

M. D.

L' osservazione del 19 marzo riportata nella Tav. I è nelle vicinanze del perielio. Cogli elementi si ottiene

$$AR = 23.^{h}54.^{m}12^{s}70$$
$$D = 43.\ 48.\ 52\ 13$$

quindi

Error. in AR calc—osser = + 17.^{s} 57
in D................ = + 50″ 70

Elementi ellittici della cometa periodica di Brorsen.

7.° È questa un'altra cometa sul cui periodico ritorno non può cadere dubbio alcuno. Le orbite ellittiche calcolate nella sua prima apparizione nel 1846 dai signori *Brunnow*, *Goujon*, *Challis* e dall'italiano *Gobbi Belcredi* allievo in quell'epoca del ducale osservatorio di Modena, si accordano tutte nel fissare il periodo di circa 5 anni e $\frac{1}{2}$. Nella speranza di poterla vedere nel secondo periodo, il signor *Galen* ne calcolò gli elementi e una effemeride. Il passaggio al perielio era fissato pel giorno 10 Novembre del 1851, e l'effemeride calcolata di cinque in cinque giorni aveva principio nel 10 settembre e terminava col 10 gen. 1852. La cometa però si trovava in circostanze poco favorevoli, e si poteva appena osservare nel crepuscolo della mattina. Questa può essere la cagione per cui nel secondo periodo passò inosservata.

8°. I primi elementi furono da me calcolati con osservazioni poco distanti fra loro: questi però rappresentavano sufficientemente le stesse osservazioni. Fidando allora sulla posizione del piano dell'orbita, cioè

$$☊ = 101.^{\circ}\ 53.'\ 1.''\ 78$$
$$i = 29.\ 44.\ 58.\ 00$$

presi le tre seguenti osservazioni.

1857. Marzo 18. 322415 t. m. a Parigi

$G = 31.°36.' 25.''40$
$b = -3. 57. 39. 30$
$T = 178. 10. 43. 78$
$\log. R = 9. 9983276$

Aprile 5. 301841

$G° = 52.°42.'41.''80$
$b° = + 10. 25. 54. 50$
$T° = 195. 56. 45. 88$
$\log. R° = 0. 0005624$

Aprile 21. 301745

$G' = 73.°38.'25.''30$
$b' = + 26. 21. 5. 00$
$T' = 211. 35. 56. 08$
$\log. R' = 0. 0025144$

La prima osservazione del 18 Marzo è di *Bruhns* che ne fece la scoperta nello stesso giorno. La cometa non era passata al perielio, ed era anche vicina al nodo ascendente. Le altre due si trovano nella Tav. II: i tempi però delle tre osservazioni sono ridotti al meridiano di Parigi.

9.° Chiamando N, N,° N;' r, r,° r' le tre elongazioni eliocentriche della cometa dal ☊, e i tre raggi vettori, ottenni

$N = 345.°26.'47.''4$	$\log. r = 9. 8164074$
$N° = 32. 44. 4. 9$	$\log. r° = 9. 8029402$
$N' = 68. 7. 31. 3$	$\log. r' = 9. 8808999$

Con questi dati potei determinare, indipendentemente dal parametro, l'elongazione eliocentrica del perielio dal ☊ e le tre anomalie vere: ebbi dunque

$\Pi' = 13.°54.'27.''75$
$\upsilon = 331. 32. 19. 65$
$\upsilon° = 18. 47. 37. 15$
$\upsilon' = 54. 13. 3. 35$

Passai quindi a determinare i parametri dell' orbita, ed ottenni finalmente gli elementi

Pas. al perielio. 1857 Marzo 29. 2332058 t. m. a Parigi

$\Pi = 115.^\circ 47.' 29.'' 53$) eq. med. del 1.° Marzo
☊ $= 101 \; 53. \; 1. \; 78$)
$i = 29. \; 44. \; 58. \; 00$

log. $\varepsilon = 9.\,9015520$
log. $a = 0.\,4851797$
log. $\mu'' = 2 \; 8222421$
M. D.

10.° Dalle cose esposte si vede chiaramente che nello istante della prima osservazione la cometa doveva percorrere 28.° 27.' 40.'' 35 di anomalia vera per giungere al perielio, e che nello istante della terza osservazione ne aveva percorsi 54.° 13.' 3.'' 55; i tempi impiegati a percorrere le dette anomalie sono 10.g 910790; 23.g 079305, cioé 33.g 990095; ma dalla prima alla terza osservazione si contano 33.g 979330; dunque l' errore fra il calcolo e l'osservazione di 0.g 010765. Gli elementi dunque debbono avere qualche piccola correzione.

11.° Non ostante questa piccola differenza, le tre osservazioni sono benissimo soddisfatte. Chiamando infatti λ, β, r; G, b, Δ le coordinate eliocentriche e geocentriche, partendo dagli argomenti di latitudine N, N,° N', e dagli elementi fissati, si trova

Marzo 18. 322415 t. m. a Parigi
$\lambda = 89.^\circ 10.' 53.'' 18$
$\beta = - \; 7. \; 9. \; 43. \; 80$
$lr = 9.\,8164074$

$G = 31. \; 36. \; 24. \; 98$
$b = - \; 3. \; 57. \; 38. \; 00$
$l\Delta = 0.\,0729111$

Err. in long. calc—osserv = — 0." 42
in lat.................... = + 1. 30

Aprile 5. 301841

$\lambda =$ 131.° 3.' 4."48
$\beta = +$ 15. 33. 47. 60

lr = 9. 8029402

G = 52. 42. 43. 08
b = + 10. 25. 51. 80

$l\Delta$ = 9. 9737597

Err. in long. calc — osserv = + 1." 28
in lat.................... = — 2. 70

Aprile 21. 301745

$\lambda =$ 167.° 4.' 1."88
$\beta = +$ 27. 24. 56. 40

lr = 9. 8808999

G = 73. 38. 29. 68
b = + 26. 20. 59. 10

$l\Delta$ = 9. 8968402

Err. in long. calc—osser = + 4.° 38
in lat.................. = — 5. 90

Gli errori sono piccoli, sembra però che vadano crescendo nello stesso senso a misura che le osservazioni si allontanano dal perielio.

12.° Da un confronto che può farsi degli elementi calcolati nella prima apparizione, come anche di quelli calcolati per la seconda del 1851, con quelli che generalmente si sono ottenuti in questo terzo periodo deve concludersi che le perturbazioni planetarie pochissimo abbiano influito sul corso periodico di questa cometa. Qui però a me sembra che meriti tutta l'attenzione degli astronomi il fatto seguente. Il Signor *Galen* partendo dagli elementi

dati pel 1851 del secondo periodo ha voluto calcolare gli elementi pel terzo periodo del 1857, e introducendo nel calcolo tutte le perturbazioni planetarie, ne fissa il passaggio al perielio nel giorno 25 Giugno del 1857. In questa ipotesi ha calcotata una effemeride che ha principio nel 1 Maggio, e di cinque in cinque giorni giunge fino al 24 Agosto. Stando a questa effemeride la cometa si trovava in circostanze poco favorevoli per poter essere osservata, e se non veniva per fortunato accidente scoperta dal Signor *Bruhns*, egli è certo che con quella effemeride non si sarebbe osservata. Stando al calcolo delle perturbazioni il ritorno al perielio si sarebbe allungato: diffatti il passaggio al perielio nel 1851 è fissato dal Signor *Galen* nel giorno 10 Novembre e nel 1857 nel giorno 25 Giugno, quindi il tempo periodico di anni 5. 62; mentre dagli elementi risulta di anni 5. 34.

13.° Nel giorno 27 Giugno del 1851 fu scoperta dal Signor D'Arrest una piccola cometa, il periodo è di anni 6. 43 circa. Ne aveva io tentato il calcolo delle perturbazioni prodotte da Giove e Saturno per circa una metà dell'orbita. Vedeva però che questi due pianeti, attesa la loro distanza dalla cometa, poco o nulla avrebbero influito sul corso di questa cometa, dopo questo fatto ho abbandonato il pensiero di proseguire questo laborioso lavoro. Se dunque il tempo periodico è ben determinato, al termine di quest' anno o al cominciar dell' altro potrebbe mostrarsi nel nostro cielo.

14.° Ma altra cometa si attendeva dal volgo; cometa terribile, cometa che avrebbe incendiato e distrutto l'universo. Sembra impossibile che nel secolo in cui viviamo, che tutti chiamano *secolo del progresso e dei lumi* non sieno ancora sparite dalle menti degli uomini le superstiziose idee di infortuni grandissimi, di disastrose calamità che si temevano una volta nè secoli detti *d'ignoranza* come funeste conseguenze delle apparizioni di questi astri.

15.° È questa la famosa cometa dell'anno 1264 la quale si suppose identica a quella che apparve nel 1556: quindi si dedusse che il suo ritorno doveva essere nel 1848; questa identità era una semplice congettura , per cui *Pingré* dopo di aver parlato del ritorno probabile di questa cometa nel 1848 aggiunge *ou un* , *ou deux ans plus tot. Si elle reparoit, la conjecture sera convertie en certitude.*

16.° Nel 1856 si pubblicò, in Milano un libretto col titolo *riapparizione imminente della gran cometa dell' anno* 1556. In questo libro si afferma che l' opera di *Paolo Fabricio* in cui questo dotto medico ed astronomo aveva registrate giornalmente le osservazioni fatte sulla cometa del 1556 non si poteva rinvenire, e formava l'oggetto delle premurose ricerche degli astronomi.

17.° Il Cav. *Carlini* direttore della specola di Milano pubblicò un articolo nel foglio Milanese , in cui asseriva di aver veduto coi propri occhi in Vienna presso l'astronomo *Littrow* non solamente lo scritto latino di *Fabbricio* intitolato *judicium de cometa,* ma un altro poco diverso in lingua tedesca , ed inoltre un opuscolo sullo stesso argomento di Gioacchino *Heller* astronomo di Norimberga. Non ostante però queste preziose notizie rimaneva sempre il dubbio su i precisi elementi della cometa del 1556 , e quindi sulla identità delle due comete , tanto più che gli elementi di quella del 1264 calcolati dal *Pingrè* si fondavano sopra vaghe indicazioni di storici e di cronisti di quei tempi , e sopra alcune posizioni della cometa che si avevano dagli annali della Cina.

18.° La cometa però non è apparsa nel 1848, nè negli anni seguenti: come dunque, riprende il *Carlini* , la predizione appoggiata a qualche probabilità, non si è verificata? Poniamo per un momento l'identità delle due comete. 1. Può essere che sia ritornata dopo un periodo di 292 anni, ma non in una posizione opportuna per essere a noi

visibile. La cometa di *Brorsen*, come ho detto, apparve nel 1846: nel secondo periodo 1851 passò inosservata perchè appunto si trovava in posizione non favorevole: nel 1857 terzo periodo è stata osservata nel crepuscolo della sera, perchè passava al meridiano dopo il sole, e si allontanava rapidamente dall'equatore. 2.° Nella supposta identità non potrebbe dirsi che il periodo di 292 anni sia stato alterato dalle perturbazioni di qualche pianeta a cui la cometa siasi notabilmente avvicinata? Questa sola ipotesi lascerebbe la speranza di poterla rivedere: al lodato *Carlini*, sembra però la meno probabile, giacchè *vi vorrebbe*, egli dice, *un' attrazione planetaria assai forte per allungare il tempo periodico di* 8 *e più anni*. 3.° Le due comete che si credono identiche, possono essere diverse: forse si muovono in orbite paraboliche, o in orbite ellittiche di grande eccentricità, delle quali è impossibile di determinare col calcolo il tempo della rispettiva rivoluzione. La bella cometa del 1811 fu osservata in punti ben diversi e distanti dell'orbita. Le osservazioni abbracciavano un arco di 183° di anomalia vera. Gli astronomi *Conti* e *Piazzi* ne calcolarono gli elementi ellittici: l'ellisse era molto allungata: l'astronomo romano ne fissò il tempo periodico di 3056 anni: l'astronomo di Palermo lo trovò di 2620: la differenza è di 436 anni. Ora, se nelle comete che sono state osservate per molto tempo in una epoca in cui le osservazioni possono dirsi esatte, è ben difficile, in vigore della grande eccentricità, determinare con esattezza il tempo della rivoluzione periodica, che dovrem dire di quelle comete e dell'antiche specialmente, nelle quali al breve tempo della loro apparizione, si aggiunge l'incertezza e la rozzezza delle osservazioni?

19.° Ma è poi vero che le comete debbono descrivere orbite ellittiche? *At inde*, così si legge in una dotta me-

moria (a) *nulla ratione consequitur, cometas omnes ellypsim describere, ut aliqui contendere videntur: imo probabilissimum arbitror, cometas alios in ellypsibus, alios vero in Hyperbolis moveri.* In questa ipotesi *cum nihil sit quod motum hyperbolicum evertere possit, cum lex gravitatis* Ellypsim *aeque ac hyperbolam permittat,* si spiega facilmente per qual ragione moltissime comete non ritornano.

20.° Ma la probabile identità delle comete, siegue *Carlini,* non solo si desume dalla somiglianza degli elementi, ma ancora da quella delle loro apparenze e principalmente dal loro splendore. Attesa la somiglianza degli elementi, pari essendo le distanze dal sole, le apparenze debbono valutarsi dal maggiore o minore avvicinamento della cometa alla terra. Ora nel 1264 la minima distanza della cometa dalla terra fu 0,44 della media distanza fra il sole e la terra; nel 1556 la minima distanza della cometa alla terra fu 0,07. Poniamo che la media distanza del sole alla terra sia di 82 in 83 miglioni di miglia da 60 per ogni grado. Ciò posto la cometa del 1264 nel suo massimo avvicinamento alla terra, distava da questa di 36 millioni di miglia, e quella del 1556 nel suo più grande avvicinamento alla terra, distava da questa di circa 6 miglioni di miglia: nulladimeno la prima del 1264 da tutti gli storici si dice *grande e celebre cometa:* l'altra del 1556 viene descritta da *Fabbricio* con le seguenti parole: *cometa non adeo magnus, aequat enim aut vix superat stellam aliquam primae magnitudinis et obscurus lumine, cauda mediocri.*

21.° Ai due citati opuscoli di *Fabbricio* si deve aggiungere un terzo in lingua francese coll'ortografia di quel tempo. Questo opuscolo è posseduto dal Sig. *Kobler* di Lipsia, ed è stampato nel 1557 col titolo. *Le cours et signification du*

(a) Exercitatio astronom. habita in coll. rom. a PP. S. Iesus anno 1770 De motu cometarum.

comete qui a este veu l'année precedente en mars par maistre Pol Fabrice mathematicien du Roy des romains dans le discours du quel il dispute doctement de son opinion, touchant la fin du monde. Trovati i preziosi scritti di *Fabbricio* e l'opuscolo di *Heller*, gli astronomi *Hoek* di Leida, *Hind* d'Inghilterra, *Bomme* di Middelburgo hanno potuto rettificare gli elementi parabolici della cometa del 1556 calcolati da *Halley*, e nella supposizione che la cometa del 1264 sia identica a quella del 1556, introducendo le perturbazioni planetarie, il sig. *Bomme* conclude, che stando agli antichi elementi di *Halley*, la cometa potrebbe ritornare al perielio nel 1860: stando agli elementi corretti di *Hind*, il ritorno sarebbe nel 1858. Alla stessa conclusione giunse il sig. *Hoek*, adottando anche egli gli elementi di *Hind*; quindi è a presumersi che l'epoca del passaggio al perielio, nel supposto ritorno della cometa, che risulterà dai calcoli dell'astronomo inglese non si allontanerà notabilmente dall'agosto del 1858. Così l'astronomo *Carlini* in un secondo articolo che si lesse nella gazzetta ufficiale di Milano del giorno 13 Decemb. del 1856. Che anzi aggiunge che se i calcoli delle perturbazioni presuppongono la identità delle due comete, niun nuovo peso aggiungono alla probabilità della identità medesima. Che se poi questa cometa sarà per ritornare nel 1858, nella sua minima distanza dalla terra, si troverà sempre distante dalla medesima di circa 17 miglioni di miglia. Se dunque si voglia concedere l'indentità delle due comete, se vogliasi concedere probabile il ritorno nel 1858, sarà sempre fuori di ogni probabilità che si presenti come un astro grandissimo, portentoso, foriero di calamità, e disgrazie.

22.° Qui però mi si permetta d'indagare per qual ragione dal volgo si temeva il ritorno di questa cometa, o per dir meglio mi si permetta d'indagare l'origine di questi vani e ridicoli timori. Io sono di parere che tutti questi timori abbiano avuto origine dall'opuscolo in francese in cui si trova

che Paolo *Fabbricio* indicando il corso e le apparenze della cometa del 1556, disputando dottamente, manifestasse la sua opinione sulla fine del mondo. L'associazione di queste idee: un astronomo che indica il corso di una cometa e che parla della intera distruzione del genere umano: le comete credute sempre dal volgo come funesti forieri della collera divina; ecco a mio parere l'origine de' timori. Questo fatto non è nuovo nella storia, un somigliante timore e spavento si sparse già in tutta l'Europa non già nei secoli dell'ignoranza, ma nel 1773.

23.° Il *La-Lande* avea discusse alcune sue opinioni sulle comete : *nel manifestare*, egli dice, *ad alcuni miei amici il risultamento de' miei calcoli è passato di bocca in bocca, e si è accresciuto molto più rapidamente di quel che io avrei potuto pensare. Tosto si è detto che io aveva annunciata una cometa che fra un anno, fra un mese . . . fra otto giorni avrebbe cagionata la fine del mondo. Questi rumori popolari sono giunti fino al termine di sbigottire, ed io ho creduto esser tenuto di dare al pubblico una spiegazione capace dì metterlo in sicurtà*. Questa spiegazione si contiene in uno opuscolo intitolato *riflessioni sulle comete che possono avvicinarsi alla terra*. Se la spiegazione data da *La-lande* bastasse a calmare gli agitati animi del volgo, io non saprei dirlo: dirò solamente che in quell'epoca si pubblicarono in Francia e in Italia diversi scritti ne'quali si prendono a confutare le opinioni stesse di *La-lande* e di altri filosofi che prima di lui o per capriccio di fare ipotesi, o per malizia gittarono, per dir così, le fondamenta di questi timori. L'intera confutazione di tutti questi sogni filosofici può leggersi nel capo IV intitolato *des effets des comètes* del secondo tomo della cometografia di *Pingrè* pubblicato in Parigi nel 1784.

24.° Fra gli scritti pubblicati in Parigi nel 1773 merita particolar menzione un opuscolo stampato nell'Agosto di detto anno il cui titolo è *reflexions d'un homme de bon sens sur*

les cometes et sur leur retour ou preservatif contre la peur. Questo opuscolo è scritto con uno stile vivace ed energico: ne presento la prima pagina che serve d'introduzione.

» J'ai long-tems envisagé comme un paradoxe étrange ce
» qu'osait avancer le célebre Jean-Jacques Rousseau, *qu'il*
» *y a plus d'erreurs dans l'académie des sciences que chez*
» *tout un peuple de Hurons.* L'èvênement prouve aujourd
» hui que cet éloquent ècrivain ne s'est pas tout-à-fait
» trompé. Une terreur paniquc se rèpand dans toute l'Eu-
» rope, à l'occasion de la comete annoncée pour un jour
» prèfix, et que le peuplc attend le 2 Octobre prochain. Les
» ignorans ajoutent foi sans examen aux décisions trop in-
» certaines de nos profonds calculateurs; les savans, trompés
» eux-mêmes par un appareil imposant d'algebre et de géo-
» metrie ne sont pas exempts d' effroi. La médisance est
» suspendue dans tous le cercles de femmes ; on les voit
» palir en ècoutant et racontant tour-à-tour ce qu'elles ont
» appris du dèluge universel ou de l'embrasement total dont
» notre globe est menacè. La frayeur a passé jusques dans
» les villages; on attend dans deux mois d' ici la destru-
» ction du genre humain; et s'il ètail uu autre globe ou
» nous poussions nous retirer, on verrait les Europèens quit-
» ter ce-lui-ci par milliers, pour chercher ailleurs un asyle...
» Rassurez-vous; apprenez *qu'il y a plus d'erreurs.* . .

25.° L'anonimo o l'uomo di buon senso prende quindi dai fasti cometari tutto qnello che si trova di positivo o d'immaginario sul *nucleo*, sulla *coda*, sul *corso* delle comete: formula proposizioni, numera i fenomeni osservati, e finalmente *de ces phènomenes*, egli dice, *avoués de tous les astronomes je tire deux propositions qu'ils ont trouvé bon de contester jusqu'à présent, mais dont l'experience les forcera bientót a' reconnaitre la certitude.*

1. *Les cometes ne suivent aucune orbite fixe et qui leur soit propre.*

2. *Il est conséquemment impossible de prévoir leur apparition et d'annoncer leur retour.*

Se le due proposizioni fossero vere, l'anonimo avrebbe trovato il mezzo più facile di calmare gli animi sul ritorno di quella cometa che doveva apparire nel giorno 2 di Ottobre del 1773, e avrebbe tolto ogni timore sul ritorno delle altre, e per consequenza le sue riflessioni sarebbero state il vero *preservatif contre la peur.*

26.° E rispetto alle due proposizioni in genere deve notarsi che l'anonimo scriveva in un epoca in cui si erano sparse le ipotesi le più assurde sulla natura delle comete, su i danni che potevano cagionare nell'avvicinarsi alla terra, o a qualunque altro pianeta: non è dunque meraviglia che, per togliere ogni possibile timore, egli consideri le comete come le considerava *Aristotele* o più propriamente come le considerava *Galileo*, il quale sosteneva *vaporem saepe fumidum ex aliqua terrae parte in altum supra lunam etiam ac solem attolli, et simul atque extra umbrosum terrae conum progressus, solis lumen aspexerit, ex illius veluti luce concipere et cometam parere*; quindi secondo il parere di *Galileo lumen hoc* (cometarum) *ex eorum genere est, quae per alterius luminis refractionem ostentata verius quam facta, umbrae potius luminosorum corporum, quam luminosa corpora dicenda videntur qualia sunt irides, coronae, parelia etc.* (a) Sembra dunque che l' anonimo dovesse avere questa opinione sulla natura delle comete, e che in virtù di questa opinione medesima formolasse quelle due proposizioni. Diffatti se alle comete, si voglia attribuire una massa e una densità, e un corso regolare, ovvero se le comete si vogliano considerare come pianeti dotati di più di una atmosfera che a noi si presenta *sous l'image d' un brouillard qui environne de toutes parts la tête ou*

(a) Libra astron. in qua expenduntur opiniones Galilei.

le noyau de la comète, in questa ipotesi egli dice e in vigore della irregolarità dei movimenti di questi astri, essi *traversent souvent les orbites de toutes nos planetes: elles pourraint même, en passant, choquer et briser ces dernieres. La souveraine sagesse aurait-elle assigné aux comètes un cours régulier, qui croiserat le cours des autres astres et qui tôt ou tard pourrait le déranger? Toute comète est donc dans un état violent, irrégulier, et passeger. . .* e per conseguenza *il est aussi peu possible de prevoir et de fixer l'apparition de ces astres, dont la marche est si incertaine et si peu règuliere que de predire avant un orage, la direction de chaque èclair, son ètendue, le moment où il brillera, les lieux où tombera la foudre ec.*

27.° Riguardo poi alla seconda proposizione in particolare, la quale è una conseguenza della prima, deve anche notarsi che in quell'epoca non si conosceva che il solo ritorno della cometa di *Halley*. Era dunque ben naturale che l'anonimo cercasse di provare che la predizione non si era verificata. Egli però prende un grosso equivoco parlando della cometa apparsa nel 1758 osservata da *Messier*, *Cassini*, *Monnier* e da altri astronomi: la cometa di *Halley* fu la prima del 1759. *Clairaut* ne predì il ritorno al perielio nel giorno 13 aprile, e passò al perielio un mese circa prima cioè ai 13 di marzo del 1759. Niuno degli astronomi ha mai immaginato che quella del 1758 sia quella di *Halley*: bastava notare che quella del 1758 é diretta, ed è retrograda la famosa di *Halley*: questo solo indizio esclude ogni identità.

28.° Ma se l'anonimo avesse scritto ai nostri tempi avrebbe potuto formulare quelle due proposizioni? avrebbe potuto asserire con franchezza che quelli astronomi che hanno tentato di predire il ritorno delle comete *se sont trompés et ceux qui le tenteront, se tromperont toujours*? Le comete periodiche di *Encke*, *Biela*, *Faye* e l'ultima di *Brorsen* provano bastantemente che le comete hanno orbite fisse: che queste

sieno ritornate ai loro perielii nè tempi fissati dal calcolo, si prova dalle osservazioni che ne sono state fatte: che le osservate ne' loro successivi ritorni sieno identiche a quelle che si attendevano, si dimostra dalla somiglianza delle loro orbite e dalla direzione de'loro movimenti: ciò sembra bastare per distruggere le due proposizioni dell'anonimo. Nè vale il dire che le comete di sopra indicate hanno un corto periodo giacchè quella di *Halley* compie la sua rivoluzione in anni circa 76: ne' vale il dire che di molte comete delle quali è stato fissato il periodo, fra le quali quella del 1770 che ha anche essa un corto periodo di anni 5½ non siansi più vedute. Si possono dare delle circostanze per le quali possa cambiarsi la natura dell' orbita : si può leggere su questo argomento il capo III del secondo tomo della cometografia di *Pingré* intitolato *du retour des comètes.*

29.° La mòderna astronomia rinunziando ai sogni e alle superstiziose idee degli antichi astrologi considera, dice *Pingré*, le comete come veri pianeti *aussi anciens que le monde, assujettis dans leurs mouvemens aux lois gènérales de l'univers;* scoperte le leggi *Kepleriane*, scoperta da *Newton* la legge della universale gravitazione *jam filum repertum*, scrive *Gauss* , *quo ducente labyrintum motuum cometarum antea inacessum ingredi licuit ..... cometaeqne usque ad illum diem semper indomiti , vel si devicti videbantur mox seditiosi et rebelles, frena sibi iniici passi, atque ex hostibus hospites redditi, iter suum in tramitibus a calculo delineatis prosequuti sunt, iisdem quibus planetae legibus aeternis religiose obtemperantes.* Quindi dopo *Newton* i più grandi geometri del passato secolo, e del nostro, hanno immaginati metodi eleganti e semplici per calcolare le orbite di questi astri. Ma le comete non sono a noi visibili per lungo intervallo di tempo; l'arco dell'orbita descritto nel tempo della loro apparizione è ben piccolo; le osservazioni, in vigore di quella nebulosità da cui sono circondate, non

possono riuscire esatte. Queste circostanze poco favorevoli non s' incontrano ne' pianeti, i quali si possono osservare ne' diversi punti delle loro orbite: le osservazioni de'pianeti sogliono essere esatte perchè li vediamo come piccole o grandi stelle ben distinti e terminati. Attesa la piccolezza dell'arco delle orbite cometarie descritto nel breve intervallo della loro apparizione, è permesso agli astronomi di supporre l'orbita parabolica: egli è un fatto di cui non può dubitarsi che nelle comete di corto periodo, anche le prime osservazioni non possono essere rappresentate con un arco di parabola; si calcola allora l'orbita ellittica; ma questa non può aversi che come una prima approssimazione: l' ellissi cometarie sogliono essere molto allungate: un piccolo errore nella eccentricità dell' orbita influisce molto sulla determinazione del semiasse maggiore da cui dipende la durata della rivoluzione. Queste sono le grandi difficoltà che s'incontrano nel calcolo delle orbite cometarie, e quando gli elementi calcolati non si veggono collimare con quelli di altre comete già vedute, è sempre cosa difficilissima predire il ritorno di questi astri.

30.° Gli astronomi moderni convengono però che le comete sieno corpi di poca massa e densità e di gran volume: in vigore dunque della reciproca attrazione, le comete nell' avvicinarsi molto ai grandi pianeti vanno soggette a forti perturbazioni, e tali che sieno anche capaci di variare la natura delle loro orbite. Senza citare l' esempio della cometa del 1770, basti l'analogo di quella che fu scoperta in collegio romano dal P. *de Vico* nel 22 agosto 1844. Le osservazioni erano soddisfatte in un orbita ellittica di corto periodo di circa 5 anni e ½. Nel 1851 non fu osservata. Il Sig. *Le-Verrier* ha dimostrato che trovandosi nel suo afelio molto vicina all'orbita di Giove nella serie dei secoli precedenti può aver sofferto grandi variazioni, e forse la sua orbita di parabolica in origine potè

divenire ellittica e tale potrebbe ritornare in una remota epoca futura. (a) Che se le comete in vigore della piccola massa possono essere soggette a grandi perturbazioni, sarà anche vero che la loro azione sarà quasi nulla rispetto ai corpi del nostro sistema. Nulladimeno *Le-Verrier* considerando che nel combinare le teoriche dei pianeti colle osservazioni si trovano sempre differenze che non possono spiegarsi pensa che *il serait imprudent de soutenir que nous n'aurons pas à en tenir compte.* (b) Moltissime comete sono passate a poca distanza dei pianeti del nostro sistema, e niuna alterazione si è osservata nei movimenti di questi corpi. La cometa del 1454 fu tra la terra e la luna, e non produsse cambiamento alcuno nei movimenti di questi due corpi.

31.° Stando così le cose, a me sembra che senza sognare nuove ipotesi sulla natura delle comete onde togliere quel mal fondato timore che suole venire alla apparizione di questi astri, il vero filosofo deve ragionare nel modo seguente. Si potrebbe mai congetturare che uno qualunque dei pianeti possa un giorno o l'altro avvicinarsi alla terra o ad un altro qualunque pianeta e cagionarvi uno dei tanti sognati disastri? Questa congettura tenderebbe a distruggere l'ordine meraviglioso che regna nel nostro sistema planetario, in cui tutti i pianeti dalle due forze di attrazione e di proiezione sono talmente equilibrati nelle loro orbite che da esse non possano deviare a tal segno: ora quella stessa mano provvida e sovrana che ha equilibrati nelle loro orbite tanti corpi di grandi e piccole masse, non ha forse equilibrate tutte le comete nelle loro orbite rispettive? Non sono esse soggette alle forze medesime degli altri pianeti? non riconoscono il sole come loro centro? Gli immensi spazi del cielo sono forse tanto angusti da non dar luogo alle orbite delle comete senza che esse

(a) Santini sul progresso degli studi astron.

(b) Annali dell'I. osser. di Parigi. tom. 1.

s'intromettano quà e là ad invadere le altre regioni degli astri per apportarvi il disordine, e la confusione? Non si contano forse fra le orbite di Marte e Giove 44 piccoli pianeti i quali quasi tutti ad una eguale distanza dal sole sono perfettamente equilibrati nelle loro orbite rispettive? Si può dare un' opinione più contraria alla ragione, alle leggi dell'astronomia, più ingiuriosa infine alla sapienza e alla provvidenza del supremo creatore? Questo è certamente il ragionameato che deve fare il vero filosofo, e il vero astronomo che nella contemplazione del cielo, deve riconoscere la infinita sapienza di Dio, e nell'ordine e disposizione d'infiniti corpi deve ammirarne l' infinita provvidenza. Pur troppo è vero che alcune ipotesi forse troppo azzardose, ma in se stesse innocenti possono essere dagli increduli travisate a danno della religione. *Whiston* congetturò che la cometa osservata ai tempi di *Cesare* avesse cagionato il diluvio universale, e che possa un giorno operare la fine del mondo. Avrebbe poi mai immaginato qual pessimo uso doveva fare un giorno di questa fantastica ipotesi l' empio autore del mostruoso sistema della natura nemico d'ogni principio, d'ogni religione, d'ogni costume? Non abusò egli di questa ipotesi per dare una naturale spiegazione di quel miracoloso avvenimento? Siccome però gl'increduli difficilmente si appagano di sode ragioni, così il cel. *Sejour* calcolando le combinazioni che si richieggono perchè una cometa possa di tanto nelle sue successive rivoluzioni avvicinarsi alla terra e produrre o un urto, o una inondazione dimostrò che si poteva scomettere l' infinito contro uno che questi sognati disastri non sarebbero mai avvenuti.

32.° Non sono però mancati astronomi i quali hanno creduto di tener altra via e di immaginare altre ipotesi sulla natura delle comete. *Piazzi* astronomo di Palermo in una memoria pubblicata nel 1812 al numero VI espone

candidamente i suoi pensieri sulle apparenze della bella cometa del 1811, e sulle comete in generale. *Questi pensieri*, egli dice, *come mi vennero li gettai sulla carta, e per verità da principio mi parvero paradossi: tali però non li vidi in seguito, nè tali sono parsi a taluno cui volli communicarli.* Prende principio dai fenomeni generali che sogliono osservarsi: *nucleo generalmente non ben terminato, spesso in mezzo a densa caligine, coda or più or meno ampia, variazioni di luce, e di grandezza, ondulazioni, fluttuazioni con getti di luce.* Premessi questi generali fenomeni trascorre le diverse ipotesi già immaginate sulla natura di questi astri, e *o sia*, egli dice, *che la cosa in se medesima oltrepassi la sfera delle nostre attuali cognizioni, o sia che non si consideri sotto il dovuto aspetto, quanto finora si è detto, punto non soddisfa ed è oscuro assai e confuso.* Sembra poi al lodato astronomo che l'ammettere le comete simili e coeve ai pianeti sia una opinione dovuta piuttosto ad un certo prepotente influsso dell'antichità su i nostri giudizi, che a ben fondate ragioni: espone quindi il suo parere colle seguenti parole. *La materia solare si diffonde ben oltre la sfera di Urano* (nell'epoca in cui scriveva si pensava che l'orbita di Urano segnasse i confini del nostro sistema) *e continuamente fluisce, quella delle stelle investe per ogni lato tutto il nostro sistema: dei vapori che sviluppansi dalla terra, e passano nell'atmosfera, alcuni, per avventura rendonsi per tale maniera leggieri di staccarsene, e restarne per sempre separati, e così può accadere delle emanazioni degli altri pianeti: altre materie aeriformi e che noi non conosciamo, può ben dirsi che sieno sparse nello spazio. Tante e sì diverse sostanze miste insieme debbono, secondo le loro affinità ora attrarsi, ora respingersi, quì combinarsi in un modo, là in un altro: prima in piccole masse, indi in più grandi e più dense, e così progressivamente. L'attrazione propria della materia in*

generale, e la forza d'impulsione, conservandosi pur sempre così ne'piccoli, come ne'grandi aggregati, e gli uni e gli altri roteranno intorno al centro verso cui sono sospinti, e intorno al sole quelli che si trovano entro la sfera di sua attività. Ove dunque dir non si voglia che la natura sempre intenta sulla nostra terra a distruggere e riprodurre, sia per altrove inoperosa, ed inerte, non può sembrare strana ed assurda l'opinione di colui, che osi asserire non essere forse le comete che corpi i quali sorgono nell'immensità dello spazio, in uno stato da principio gassoso e poco compatto, e che indi si consolidano colla precipitazione, e concentrazione delle molecole affini in cui a mano a mano si avvengono nel loro corso.

33.° Prendendo quindi le mosse da ciò che la natura suole operare sulla terra nella formazione degli esseri, e dalla terra passando colla immaginazione oltre i confini del nostro sistema, ricerca qual tempo sarà necessario alla formazione del primo embrione delle comete, quale perchè si rendano a noi visibili, quale onde acquistino solidità e consistenza, quale infine avanti che periscano e si distruggano. Questo tempo, egli dice, *è grandissimo rispetto a noi, misurato regolare rispetto alle comete diverso però in ciascuna e in talune nel rapporto della vita dell'efimero a quella dell'elefante, in tutte però conforme alla quantità, base e coesione delle parti componenti. Altre quindi faranno più giri intorno al sole, altre meno, ed altre appena giungeranno a compierne uno solo.* Fondato su questa idea, pensa che le comete nel primo periodo della loro formazione debbano presentare a noi una massa vaga, indistinta, e mal terminata; nell' altro periodo incontrando maggior copia di materia affine, dalla precipitazione di questa, sorgeranno le code: quindi nel terzo periodo acquisteranno consistenza e solidità, il nucleo sarà meno confuso e più distinto, le code più piccole, e scorrendo così di periodo in periodo le considera finalmente sa-

turate delle analoghe particelle o perchè non possano esse più riceverne o perchè già cominciano a venir meno, debbono presentarsi a noi circondate da piccola corona.

34.° Per dare un peso maggiore a queste sue idee prende ad esaminare quanto di certo e di positivo noi conosciamo sulle comete: il loro numero, i loro periodi, i loro ritorni predetti e non verificati, le loro masse, le loro atmosfere le loro direzioni ed inclinazioni; paragona le apparenze delle comete con ciò che noi conosciamo positivamente su i pianeti del nostro sistema: regolarità cioè ne' movimenti, nelle direzioni, nelle orbite, nelle inclinazioni, nelle masse, e nelle distanze, e *spogliati*, egli dice, *delle opinioni ricevute e cresciute in noi senza di noi saremo costretti a confessare che i pianeti debbono la loro esistenza ad una sola ed unica causa, e sono il risultamento di una sola ed unica combinazione, e che le comete e sono venute, vengono, e possono venire da tutte le infinite combinazioni cui va sempre soggetta la materia secondo le forze a lei impresse.* Difatti *se fossero coeve ai pianeti quante e quante volte non avrebbero dovuto apparire, e ricomparire! Quasi ogni anno sarebbe segnato dalla apparizione di qualche cometa di cui si saprebbe così bene il periodo come si sa dei pianeti. Una sola finora si è veduta e riveduta, quindi non siamo lontani dal vero dicendo che tratto tratto e si formino e si distruggano, e che quelle che si aspettavano e non sono ritornate probabilmente già sciolte in vapori e consunte, abbiano servito di alimento alla formazione delle nuove che appaiono.* Secondo dunque l'opinione dell'astronomo palermitano *le comete altro non sono in generale* che piccole masse o sia piccoli aggregati di materia sotto gran volumi circondati da più grandi atmosfere, corpi leggerissmi e in uno stato di continua evaporazione, corpi che non hanno tra loro altro rapporto che il proprio della materia di girare intorno al centro comune di forze, e in una parola *meteore mondiali* dalle quali nulla abbiamo a

temere: corpi finalmente il cui urto contro la terra o contro un qualunque pianeta non potrà cagionare maggior disordine di quello che possa fare un granello di arena contro uno scoglio.

35.° Partendo dallo stesso principio spiega il singolare fenomeno delle code, e come queste sieno or più or meno dense, ora più o meno lunghe. Se le comete, egli dice, si formano lentamente dal concorso e continuo afflusso delle molecole affini cui vanno incontro nel loro cammino, e che da ogni lato si precipitano in esse, quelle che vengono nella direzione opposta dei raggi solari, rifletteranno questi raggi medesimi, e la parte riflessa che giunge alla terra ci presenterà il fenomeno delle code : e poichè delle malecole affini altre potranno essere più dense, altre meno, in un luogo in maggior copia, in un altro in copia minore, ne verranno i vari accidenti che si osservano. Siccome poi le comete non possono supporsi formate dalle stesse sostanze, anzi dobbiam credere che le parti componenti sieno diverse in ciascuna, così delle molecole che vanno alle comete, secondo le rispettive leggi di affinità , altre partiranno da maggiori, altre da minori distanze, formeranno in tal maniera una specie di catena di affinità primarie verso le comete , di affinità secondarie fra di esse, e le affinità secondarie, come é chiaro, potranno estendersi alle più grandi e prodigiose distanze.

36.° È questa l'opinione o per dir meglio il sistema dell'astronomo palermitano per spiegare la natura delle comete e la varietà de'fenomeni che si osservano generalmente nelle loro apparizioni. Il sistema è ingegnoso, e abbraccia e collega li fenomeni che noi abbiamo dai fasti cometari e ne spiega le diverse anomalie. Questo sistema però se da una parte partecipa delle idee newtoniane sulla propagazione della luce ; dall' altra se ne discosta non riconoscendo il perfetto vuoto , ciò che forma *un des principaux dogmes*

de la philosophie newtonienne, que l'immensité de l' univers ne renferme point du tout de matière dans les espaces qui se trouvent entre les corps célestes. (a) Quella *materia solare che si diffonde e continuamente fluisce*, *quella materia delle stelle che investe per ogni lato tutto il nostro sistema,* suppone il sistema della emanazione, nel quale *les rayons du soleil sortent réellement du corps du soleil, et des particules extrêmement subtiles en sont lancées et dardées avec une vitesse inconcevable* (b). Nel dir poi che i vapori che si sviluppano dalla terra o dagli altri pianeti per avventura divenuti leggieri possano, i primi sollevarsi oltre i confini della nostra atmosfera, e gli altri al di là dei limiti delle atmosfere planetarie, e così staccati e separati diffondersi nello spazio dell'universo; il dire che altre materie aeriformi che noi non conosciamo sieno sparse nello spazio; il dire che nello spazio medesimo sieno diffuse le materie delle comete che gia si sono distrutte, e che come *germi cometici* debbano formare le altre, pugna evidentemente col perfetto vuoto newtoniano.

37°. Benchè non sia facile concepire come i vapori che si sviluppano dalla terra possano per la loro leggerezza elevarsi al di là dei limiti della nostra atmosfera, e diffondersi staccati nello spazio: benchè con un solo argomento di analogia si voglia dedurre che lo stesso accada negli altri pianeti de' quali, non conoscendo la fisica costituzione, si suppongono simili alla terra dotati anche essi di una atmosfera: benchè gratuitamente si ponga l'esistenza di materie aeriformi che *noi non conosciamo* e quella dei *germi cometici*, nulladimeno concediamo per un momento che realmente nell'immenso spazio dell' universo esista la materia del sole e delle fisse, e tutte le altre. Queste diverse materie, secondo l'opinione di *Piazzi* sono le parti

(a) Lettere di Eulero.
(b) Lettere citate.

componenti le comete: quindi debbono, secondo le loro affinità ora attrarsi, ora respingersi, quì combinarsi in un modo, là in un altro: formare in seguito delle masse ora più grandi, ora più piccole, ora più dense, ora meno dense: e questi aggregati di materia dovrebbero per la forza di attrazione e di proiezione equilibrarsi nelle loro orbite e aggirarsi intorno al sole *iisdem quibus planetae legibus aeternis obtemperantes*! Ma, secondo l' opinione dello stesso astronomo, l'immenso spazio dell' universo è pieno di diverse materie: queste sono in continuo movimento, in una continua agitazione. *Descartes* immaginò una materia sottile sparsa e diffusa nello spazio. *Newton* pensò che *quelque subtile qu'on suppose la matière du ciel, les planétes y devraient éprouver quelque résistance dans leur mouvement, mais ce mouvement n'est assujèti à aucune rèsistance, donc l'espace immense des cieux ne contient aucune matière*, e suppose il perfetto vuoto. *Euler* nel confutare il sistema della emanazione dimostra che *Newton* è in contradizione con se stesso. *Newton*, dice egli, *exige un espace absolument vide dans les cieux, afin que les planétes ne rencontrent aucune rèsistance, mais chacun jugera aisément que les espaces du ciel, au lieu de rester vides, seront remplis des rayons, non seulement du soleil, mais encore de toutes les autres ètoiles qui les traversent de toute part, et en tout sens continuellement, et cela avec la plus grande rapiditè. Donc les corps cèlestes qui traversent ces espaces, au lieu d'y rencontrer un vide, y trouveront la matière des rayons lumineux dans la plus terrible agitation, par la quelle les corps doivent être beaucoup plus troublés dans leur mouvement, que si cette même matière y était en repos. Donc Newton ayant eu peur qu'une matière subtile, telle que Descartes la supposait, ne troublât le mouvement des planètes fut conduit à un expédient bien étrange, et tout-à-fait contraire à sa propre intention; vu que par ce moyen, les planètes devraient*

essuyer un dérangement infiniment plus considerable. Voilà un exemple bien triste de la sagesse humaine qui voulant éviter un certain inconvènient, tombe souvent en de plus grandes absurdités. (a) Se dunque Eulero questo profondo filosofo, questo sommo geometra pensava che i corpi celesti avessero potuto provare una forte resistenza ne' loro movimenti dai raggi sottilissimi di luce provenienti dal sole, e dalle stelle, quale resistenza dovrebbero provare nella ipotesi di *Piazzi* il quale oltre la materia del sole, e delle stelle, introduce altre materie che con quella combinandosi, possano formare le comete?

38.° L'opinione di *Piazzi* non può neppure ammettersi nel moderno sistema delle ondulazioni. Se togliamo la materia che continuamente fluisce dal sole e dalle stelle, restano sempre le altre, e bisognerebbe provare che queste combinandosi fra loro, e coll' etere sottilissimo ed elasticissimo dieno l'origine alle comete. *La réalité de l'existence materielle* (dell'etere) *est*, dice *Le-Verrier* (b) *loin d'être démontrée: elle pourra l'être quelque jour par l'observation des astres. L'éther devant, en effet, opposer une rèsistance à la marche des planètes et des comètes, sa présence se trahira par une diminution de leurs moyennes distances du soleil, diminution dont le résultat pourrait être de bouleverser notre systéme planetaire. Les comètes seraient atteintes les premières à cause de la ténuité de leur matiére; et déjà on a cru remarquer quelques traces de l'action de l'éther sur la marche périodique de la comète d' Encke.* Se ciò è vero, e se l' etere solo è capace di opporre una resistenza al movimento de' corpi celesti, questa resistenza sarebbe sempre più grande nella ipotesi di *Piazzi*. Finchè dunque non si provi che i corpi celesti sieno soggetti ad una resistenza

(a) Lettere citate.

(b) Ann. dell'I. osserv. di Parigi.

capace di turbare il loro movimento, e la materia de'raggi solari e delle fisse nel sistema dell'emanazione, e l'etere in quello delle ondulazioni, e ogni altra materia nella opinione di *Piazzi* deve eliminarsi dagli immensi spazi del cielo.

39°. È vero però che *Le-Verrier*, dopo lo spezzamento della cometa di *Biela*, sembra in qualche modo pensare che le comete non sieno ancora giunte ad uno stato permanente. *Les comètes*, dice egli, *ne paraissent pas être arrivées à un état permanent. Non-seulement la matière qui les constitue éprouve des bouleversements mais on a pu croire qu'elle se perd peu à peu dans l'espace.* Queste idee sembrano analoghe a quelle dell'astronomo palermitano non già circa la formazione di questi astri, ma circa le variazioni cui possono essere soggette dopo la loro formazione. Riguardo a questa, *Le-Verrier* nella pagina 29 parlando della formazione delle stelle, del sole, dei pianeti e dei satelliti non parla affatto delle comete: suppone che la formazione di tutti questi corpi sia venuta dalle diverse modificazioni di una *matière diffuse qui remplissait l'espace, il y a quelques milliards de siécles sans doute. Ainsi*, siegue a dire, *l'ensemble de la matière s'est d'abord rèparti entre les nèbuleuses. Puis, dans chaque nébuleuse une nouvelle dislocation a sèparè les elemens propres aux différentes ètoiles.* Parlando poi del sole, *cet astre*, dice, *n'etait point, à l'origine, rèduit aux dimensions qu'il occupe: sa matière a commencè par remplir une notable portion de l'espacs qui le sépare des étoiles. Elle s'étendait jusqu'aux limites inconnues du monde planétaire, et c'est une nouvelle subdivision qui a sèparé les planètes d'avec le soleil proprement dit.......... Le refroidissement de l'immense nèbulosité qui devait donner naissance au soleil et aux planètes, lui aura permis de diminuer de volume. La vitesse de rotation s'en sera trouvèe accrue, et la force centrifuge à l'èquateur étant ainsi venue à sur-*

passer la gravité, un anneau matériel se sera sèparé de la masse totale: un nouveau rèfroidissement aura amené la formation de nouveaux anneaux aux dèpens du corps central qui, se contractant de plus en plus, s' est enfin réduit aux dimensions du soleil qui nous èclaire, soleil dont la densitè ne permet guère de croire qu' à l' avenir il abandonne une portion quelconque de sa matière. Ce sont les anneaux ainsi formès qui rompus en un ou plusieurs de leurs points par la moindre cause accidentelle, dont il serait facile de trouver une origine, auraient ensuite donnè naissance aux planétes en se constituant, par l'attraction de chacune de leurs parties en sphères circulant autour du corps central, et douées d'un mouvement de rotation. Con analogo ragionamento passa alla formazione de' satelliti provenienti dai pianeti e *on conçoit*, siegue a dire, *même que ce mode de formation continuant à se dèvelopper, eût pu donner naissance á des satellites de satellites, mais nous n'en connaissons point.* Come già dissi in questa genesi non si fa motto delle comete, quindi è probabile, e ciò può dedursi dalle superiori citate sue parole, che l'astronomo francese non creda le comete coeve ai pianeti. Devierei troppo dal mio scopo, se qui volessi entrare in una discussione di questo sistema, dirò solamente che *Le-Verrier* e avendo riguardo ai descritti fenomeni, e ammirando la regolarità de' movimenti di rotazione, e di traslazione del nostro sistema planetario stima 1.° che *la séparation* (della materia) *ne s' est point effectuée au hasard, mais bien avec règularité et prècision et dans un ordre tout particulier*: 2.° che non possa darsi *esprit si peu philosophique qui ne saisirait pas dans cette circostance la révélation d'une cause unique dont l'influence a pliè tous les mouvements à un caractère commun.* A mio parere il concetto di questo illuste filosofo sarebbe stato più completo, dicendo che si debba necessariamente riconoscere una prima causa eminentemente intelligente e li-

bera che ha creato la materia, ordinandola alle eterne e sorprendenti leggi che noi ammiriamo nelle opere della creazione, e in modo particolare nella regolarità de' movimenti de'corpi celesti. Il P. *Pianciani* nel suo commentario *in historiam creationis mosaicam* riporta presso a poco questo sistema e quindi soggiunge. « Hujus doctrinae quam « exposui, probabilitatem philosophice examinare Theologi « non est. Hoc unum dico, nihil in ea, si quid video, re- « ctae fidei contrarium esse, dummodo *confiteamur ab uno « Deo omnem materiam creatam, legesque concreatas, quibus « illa regitur et perficitur* ». In questo caso però non già per *causa accidentale, ma in forza delle eterne leggi*, gli anelli formati della materia solare si dovevano rompere e dare origine ai pianeti, e in virtù delle stesse leggi gli anelli formati della materia planetaria si dovevano rompere, e dare origine ai satelliti.

40.° Debbo in fine parlare di una recentissima opinione sulla natura e fisica costituzione delle comete. Nel *cosmos* del 27 Feb. 1857 all'articolo *variétés* si legge: *les comètes reduites à leur juste valeur*: questo giusto valore si riduce finalmente ad *un rien visible.* Tant' è il *cosmos*, per preservare i suoi lettori dalla paura della *prètendue comète qui le* 13 *juin devait rèduire notre globe en poudre*, è quanto puó offrire ai medesimi. *Tout ce que nous pouvions offrir à nos lecteurs pour son instruction c'etait une preuve mathèmatique et peremptoire du nèant des comètes.* Se ciò fosse vero, e *Newton*, e tutti i più grandi geometri del nostro e del passato secolo avrebbero inutilmente faticato nello immaginare i loro eleganti metodi per calcolare le orbite delle comete, e gli astronomi sarebbero ben pazzi di applicare i suddetti metodi alle osservazioni di questi astri per dedurre l'orbita che descrive intorno al sole una vaga meteora, una nube, un lampo ... le quali cose hanno maggior valore di *un rien visible.* Nulladimeno all' annunzio

dell'apparizione di uno di questi astri, gli astronomi tutti e lo osservano, e ne calcolano l'orbita; dunque presso tutti i veri astronomi le comete sono state stimate, e si stimano degne delle loro fatiche, e le teoriche di questi astri sono state sempre credute, e si credono formare una delle parti la più bella, e la più interessante della scienza.

41.° L' opinione *sur le nèant des comètes* la dobbiamo al sig. *Babinet.* Egli, dice il *cosmos* , *a fait voir qu' une comète ne peut être assimilée qu' à une substance qui serait des millions de millions de fois moins compacte que l' air de notre atmosphère*: ma noi attraverso di quest' aria *des millions de millions de fois plus compacte* vediamo le comete : saremo dunque in diritto di domandare al signor *Babinet* se crede di buona fede che un globo *d' une substance qui serait des millions de millions de fois moins compacte* illuminato dal sole e collocato ad una distanza per lo più maggiore della distanza media della terra al sole , possa rendersi a noi visibile. *Newton*, dice *Pingrè a prouvé qu' un globe de l'air que nous respirons d'un pouce de diamètre seulement , peut être dilaté de manière á remplir un globe dont le diamétre excéderait celui du grand orbe de saturne. Je doute* siegue *Pingré qu' air aussi raréfié fût capable de nous réfléchir les rayons de la lumière.* E qui si noti che *Pingrè* parla dell' atmosfera che circonda le comete, e delle code che da questa si sviluppano nello avvicinarsi che questi astri fanno al perielio. Nell' opinione poi di *Babinet* deve intendersi tutto il corpo della cometa cioè nucleo, atmosfera, coda. *Une comète ne peut être assimilèe qu' à une substance* ... Ora tutti gli astronomi convengono che l'atmosfera e le code sieno sostanze estremamente rade e sottili , ma tali che illuminate dal sole si rendano a noi visibili. *La queve des comètes est certainement plus rare que la fumée: cette fumée est très-visible.* (a)

(a) Pingré tom. 2.°

42.° Ma vediamo su quali fondamenti poggia l'opinione di *Babinet*. *Une ètoile de onziéme grandeur est vue au travers de la comète de Encke fans diminution sensible de son èclat*. Che traverso i raggi luminosi delle code delle comete siensi vedute le stelle, è un fatto che non può negarsi, ma a traverso il così detto nucleo, non è a mia cognizione. Questo nucleo poi è circondato da una atmosfera, questo nucleo difficilmente può distinguersi: è dunque possibile che la stella siasi veduta a traverso l' atmosfera la quale è sempre meno densa del nucleo. Riguardo alle stelle che si sono vedute a travesso i raggi della coda, abbiamo in *Pingrè* la testimonianza di *Cysat* che osservò la cometa del 1618. *Stellae hodie et sequentibus diebus per comae radios prope caput tralucentes aliquantulum obscurabantur a cometae radiis, inducta illis quasi nube, adeoque eclipsim aliquam patiebantur*. Le stelle, secondo *Evelio*, erano *Arturo* e quella dell'estremità della coda dell'orsa maggiore, stelle cioè di prima e seconda grandezza, e nulladimeno si afferma che i raggi della coda facevano le veci di una nuvola, *inducta illis quasi nube* e che ne erano oscurate *adeoque eclipsim aliquam patiebantur*. Tutti poi convengono che le code possono essere più o meno dense. Abbiamo però un curioso fenomeno nella bella cometa del 1811. Il nucleo di questa, come riferisce *Piazzi* nella citata memoria, appariva separato dall'atmosfera intorno. Le misure prese da questo astronomo del diametro del nucleo sono di 2'. 30;" 2.' 16" 2.' 15." Queste misure collimano con quelle che si ottennero dagli astronomi del collegio romano; così, per esempio, nella sera del 6 ottobre si trovò il diametro del nucleo di 2.' 14" e nella sera del 7 novembre risultò di 2.' 15." Il Prof. G. Calandrelli misurò più volte il diametro dell' atmosfera: questo diametro si trovò variabile nelle diverse osservazioni; il massimo di 32.' 13" fu nella sera del 6 ottobre; quindi concluse, che il nucleo appa-

rente, qualunque ne sia la causa è variabile, nè deve confondersi col nucleo solido. Si ebbe poi la notizia che *Herschel* in una memoria letta nella società reale di Londra, assicurava di aver potuto distinguere col suo gran telescopio un disco più lucido del resto, il quale considerabilmente deviava dal centro, e la cui chiarezza variava d'intensità; assicurava inoltre che questo nucleo solido della grandezza prossima della Luna era un vero corpo planetario attorniato da una atmosfera cometica. Ora, scrive *Piazzi*, nella sera del 24 decembre *con un cielo bellissimo si osservò una piccola stelluccia sul disco stesso della cometa, o sia dentro i limiti tra i quali appariva che fosse circoscritto il nucleo*: la distanza della stella dagli orli si stimò di 30″ e dal centro di 60.″ Questa stella è riportata nel catalogo num.° 197 dell'ora XX ed è notata di 12.ª grandezza. Nelle note al catalogo si legge: « Cum die 24 di-
« cembris an. 1811 per cometae illius anni *atmospheram*
« exigua quaedam stellula hic observata fuisset et in opu-
« scolo (la citata memoria) ut talis tradita eruditissimo
« equiti Ionville tunc Panormi degenti, ex Anglia cl.
« Wollaston rescripsit, quam ego stellam credideram, pro-
« babiliter fuisse cometae nucleum. Mense igitur augusti
« an. 1812 diligenter inquisivi num supposita stella revera
« existeret an non, et hanc inveni quae cum illa omnino
« convenit quoad locum, et solum differt quoad magnitu-
« dinem. Prior enim aestimata fuerat nonae magnitudinis,
« posterior duodecimae. Sed alia stella nempe 149 horae
« XX quae per cometae atmospheram apparebat quintae
« magnitudinis, in ipsius ad meridianum appulsu inventa
« est septimae vel octavae. *Phenomenon sane singulare quod*
« *hujus cometae atmosphera stellarum lucem longe potius au-*
« *xerit, quam minuerit.* » Se dunque per una stella *de onzieme grandeur vue au travers de la comète de Encke sans diminution sensible de son èclat, la photometrie conclut de*

suite que le rideaux lumineux que la comète fait devant l'étoile n'est pas en éclat la soixantieme de l'éclat de l'étoile , car autrement une diminution d'èclat eût eu lieu pour l'étoile per le stelle osservate da *Piazzi* che non apparivano dello stesso splendore, ma di una luce più viva e più bella *le rideau lumineux que la comète faisait devant l'étoile* in qual rapporto sarà colla chiarezza delle stelle ? Pur troppo c'inganniamo ne'nostri giudizi fidandoci ai sensi !

43.° L'opinione di *Babinet sur le nèant des comètes* si riduce ad una espressione iperbolica e poetica, cioè le comete sono un *quid* visibile et *un rien* rispetto agli effetti meccanici di urti, di rovesciamenti e sconvolgimenti che possano minacciare alla terra e agli altri corpi celesti, ed è propriamente ciò che dai latini si chiama *res ultra fidem exaggerata quae omnem fidem excedit* , mentre deve essere ben noto al sig. *Babinet* che *un rien visible étoit d'une si grande clarté que pendant la nuit elle* (la cometa) *formait des ombres à peu-prés semblables à celles que forme la lune* (Diod. sicul.) che *un rien visible étoit aussi grande que le soleil et dissipoit les ténébres de la nuit* (Seneca): che *un rien visible* (le comete degli anni 136 e 118 avanti l'era) *selon Justin ètoient plus èclatantes que le soleil:* che *un rien visible* (la cometa dell'estate del 1402) *ne permettoit ni aux ètoiles de dèployer leur lumière, ni à la nuit d'obscurcir l'air* che *un rien visible* (la cometa del 1454) passando fra la terra e la luna nel suo corso raggiunse la luna nel plenilunio e interamente occultolla: che *un rien visible* (la cometa del 1668, e quella del 1843) si vide nel pieno giorno nelle vicinanze del sole: che *un rien visible* (la cometa del 1811) aveva, secondo *Herschel*, un nucleo solido della grandezza prossima della luna: che finalmente *un rien visible* (la cometa di Halley) da circa otto secoli a quest' epoca compie esattamente il suo periodo di 75 in 76 anni *religiose obtemperans quibus planetae legibus aeternis.* Dopo

questi fatti che si hanno dalla storia dovrà *Babinet* concedere che nel niente possa darsi il più e il meno, e noi saremmo ben fortunati se nelle scuole si agitasse ancora quella magnifica questione di cui parla *Boschovich* (a) *an aliquod nihil sit magis nihil quam aliud nihil* la quale farebbe al nostro caso.

44.° Povere comete! troppo in alto vi levarono *Whiston*, *Buffon*, *Maupertuis*, *La-lande*, *Voltaire* .... La caduta era irreparabile: é stata troppo precipitosa: diventare in uno istante *ombre di corpi*, *meteore*, *vapori* .... *un rien*. Fra questi due estremi i sommi ingegni di *Newton*, *Euler*, *Clairaut*, *La-Grange*, *La-place*, *Gauss*.... vi collocarono nella classe di semplici ed innocui corpi celesti coeve ai pianeti *religiose obtemperantes quibus ipsi legibus aeternis*.

(a) Lettera diretta da Parigi il 21 Agosto 1777 al Profess. Calandrelli.

SUI POLIGONI INSCRITTI ALLE CONICHE.

DEL PROF. F. BRIOSCHI.

Il problema di determinare a quali condizioni debbano soddisfare i parametri delle equazioni di due coniche affinchè un poligono iscritto in una di esse sia circoscritto alla seconda, venne recentemente studiato dai sig. Cayley e Salmon. I risultati ottenuti da questi Geometri si presentano sotto forme assai differenti, e non sarebbe possibile che dopo lunghi sviluppi di calcolo il convincerci della loro identità. In questa nota viene provata a priori la coincidenza di quei risultati giungendo ai medesimi con un metodo che manifesta come si possano far dipendere da uno stesso principio.

Sieno $u=0$, $u=0$, $w=0$ le equazioni dei lati di un triangolo inscritto nella conica:

$$U = \alpha vw + \beta wu + \gamma uv = 0 .$$

Posto

$$V = l^2u^2 + m^2v^2 + n^2w^2 - avw - bwu - cuv ,$$

ed indicando con x_1 una quantità indeterminata; è noto che affinchè la retta $u=0$ sia tangente la conica:

$$x_1 U - V = 0$$

dovrà essere:

$$a = 2mn - \alpha x_1 ;$$

ed analogamente saranno:

$$b = 2nl - \beta x_2 , \qquad c = 2lm - \gamma x_3$$

le condizioni le quali debbono verificarsi perchè le rette

$v = 0$, $w = 0$ sieno rispettivamente tangenti le coniche:

$$x_2 U - V = 0 , \qquad x_3 U - V = 0 .$$

Ora indicando con:

$$\Delta^2(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

il discriminante della funzione:

$$x U - V$$

si hanno le:

$$a_0 = \alpha\beta\gamma , \qquad a_1 = l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2 + a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta$$

$$a_2 = 2a\alpha l^2 + 2b\beta m^2 + 2c\gamma n^2 + \alpha bc + \beta ca + \gamma ab$$

$$a_3 = l^2 a^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2 + abc - 4lmn$$

ossia pei valori superiori di a, b, c le:

$$a_0 = \alpha\beta\gamma , \quad a_1 = p^2 - \alpha\beta\gamma(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$a_2 = 2pq + \alpha\beta\gamma(x_1 x_2 + x_3 x_1 + x_2 x_3) , \quad a_3 = q^2 - \alpha\beta\gamma x_1 x_2 x_3$$

essendosi posto per brevità:

$$p = l\alpha + m\beta + n\gamma , \quad q = 4r - l\alpha x_1 - m\beta x_2 - n\gamma x_3 , \quad r = lmn .$$

Per cui rappresentando con:

$$(1) \qquad x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

la equazione di cui le radici sono x_1, x_2, x_3 si avranno le tre relazioni seguenti:

$$(2) \qquad a_1 - a_0 A = p^2 \quad a_2 - a_0 B = 2pq \quad a_3 - a_0 C = q^2 .$$

Se queste equazioni si moltiplicano ordinatamente per x_1^2, x_1, 1, e si sommano osservando alla (1) ottiensi la seguente:

$$a_0 x_1^3 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3 = (p x_1 + q)^2$$

ed altre due analoghe; dal che deduciamo essere:

$$(3) \quad a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 - (px + q)^2 = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

e pel teorema di Abel ponendo $\psi(x) = \int \frac{1}{\Delta(x)} dx$; si avrà che i parametri x_1, x_2, x_3, dovranno soddisfare all'equazione trascendente:

$$(4) \qquad \varepsilon_1\psi(x_1) + \varepsilon_2\psi(x_2) + \varepsilon_3\psi(x_3) = C$$

alla quale corrisponde la equazione algebrica irrazionale:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \Delta(x_1) \\ 1 & x_2 & \Delta(x_2) \\ 1 & x_3 & \Delta(x_3) \end{vmatrix} = 0$$

Ma le equazioni (2) conducono evidentemente anche ad una relazione algebrica razionale fra quei parametri, cioè alla seguente:

$$(5) \qquad 4(a_1 - a_0 A)(a_3 - a_0 C) - (a_2 - a_0 B)^2 = 0$$

Queste relazioni algebriche ottenute sì l'una che l'altra eliminando le p, q dalle equazioni (2) costituiscono i risultati dei sig. Cayley e Salmon.

Dalla equazione (3) si hanno le:

$$p = \frac{\Delta(x_1) - \Delta(x_2)}{x_1 - x_2} \qquad q = \frac{x_1\Delta(x_2) - x_2\Delta(x_1)}{x_1 - x_2}$$

per cui supponendo:

$$\Delta(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \quad \ldots.$$

si avrà:

$$q = A_0 - x_1 x_2 P$$

posto:

$$P = A_2 + A_3(x_1 + x_2) + A_4(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2) + \ldots.$$

La stessa equazione (3) o la terza delle (2) danno:

$$(6) \qquad q^2 - a_3 = a_0 x_1 x_2 x_3$$

quindi osservando essere $A_0^2 = a_3$ si otterrà:

$$(7)\qquad x_3 = \frac{1}{a_0}\,(x_1 x_2 P^2 - 2A_0 P).$$

Nel caso particolare in cui supponesi $x_1 = x_2 = 0$ questa formola dà :

$$x_3 = -\frac{2A_0A_2}{a_0} = \frac{a^2{}_2 - 4a_1a_3}{4a_0a_3};$$

cioè se due lati di un triangolo inscritto nella conica $U = 0$ sono tangenti della conica $V = 0$; il terzo lato sarà tangente alla conica :

$$(a_2{}^2 - 4a_1a_3)U - 4a_0a_3V = 0$$

suppongasi ora $x_1 = 0$, la formola generale (7) dà :

$$a_0x_3 = -2A_0(A_2 + A_3\,x_2 + A_4x_2{}^2 + \ldots\ldots)$$

ossia :

$$a_0x_2{}^2x_3 = 2A_0[A_0 + A_1x_2 - \Delta(x_2)]$$

dalla quale:

$$a_0x_2{}^4x^2{}_3 - 4a_0A_0x_2{}^2x_3(A_0 + A_1x_2) = 4A_0{}^2[\Delta^2(x_2) - (A_0 + A_1x_2)^2];$$

ma essendo :

$$2A_0A_1 = a_2 \qquad A_1{}^2 = \frac{a_2{}^2}{4a_3}$$

si ha :

$$\Delta^2(x_2) - (A_0 + A_1x_2)^2 = \frac{x_2{}^2}{4a_3}\,(4a_0a_3x + 4a_1a_3 - a_2{}^2)$$

per cui sostituendo e riducendo si ottiene :

$$(9)\quad a_0{}^2x^2{}_2x^2{}_3 - 4a_0a_3x_3 - 2a_0a_2x_2x_3 = 4a_0a_3x_2 + 4a_1a_3 - a^2{}_2$$

la quale formola, come anche la (8), potevansi dedurre dalla (5).

Si immagini un quadrilatero *abcd* inscritto nella conica $U = 0$ e suppongasi che i lati *ab*, *bc*, *cd* sieno tangenti alla conica $V = 0$; condotta la diagonale *ac* si ha il trian-

golo *abc* inscritto nella conica $U=0$ e di cui i due lati *ab*, *bc* sono tangenti alla conica $V=0$; per quanto si è dimostrato sopra il terzo lato *ac* sarà tangente alla conica:

$$\alpha U - V = 0$$

essendo :

$$\alpha = \frac{a_2^2 - 4a_1a_3}{4a_0a_3} .$$

Consideriamo ora il triangolo *acd* inscritto nella conica $U=0$ e del quale un lato (*cd*) è tangente alla conica $V=0$; un secondo (*ac*) tangente alla conica $\alpha U - V = 0$; il terzo lato sarà tangente alla conica $x_3 U - V = 0$ essendo il valore di x_3 dato dall'equazione (9) dove in luogo di x_2 pongasi α. Ora fatta questa sostituzione si ottiene :

$$x_3 = \frac{16a_3(8a_0a^2{}_3 + a^3{}_2 - 4a_1a_2a_3)}{(a^2{}_2 - 4a_1a_3)^2} = \beta$$

quindi il quarto lato *cd* del quadrilatero *abcd* sarà tangente alla conica :

$$16a_3(8a_0a^2{}_3 + a^2{}_3 - 4a_1a_2a_3)U - (a^2{}_2 - 4a_1a_3)^2 V = 0.$$

Immaginiamo ora un poligono $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ inscritto nella conica $U=0$ e supponiamo che i lati $\alpha_1\alpha_2$; $\alpha_2\alpha_3$; ... $\alpha_{n-1}\ \alpha_n$, sieno tangenti alla conica $V=0$; il lato $\alpha_n\ \alpha_1$ sarà tangente alla conica $x_n U - V = 0$, ed il valore di x_n si troverà nel modo seguente, Sieno $x_{n-2}U-V=0, x_{n-1}U-V=0$ le equazioni delle coniche alle quali sarebbero tangenti le diagonali $\alpha_1\alpha_{n-2}$; $\alpha_1\alpha_{n-1}$ considerate come lati dei poligoni $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-2}$; $\alpha_{n-2}\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$. Pei triangoli $\alpha_1\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}$; $\alpha_1\alpha_{n-1}\alpha_n$ si avranno analogamente alla (9) le :

$$a^2{}_0x^2{}_{n-2}x^2{}_{n-1} - 4a_0a_3x_{n-1} - 2a_0a_2x_{n-2}x_{n-1} = 4a_0a_3x_{n-2} + 4a_1a_3 - a^2{}_2$$

$$a_0{}^2x^2{}_{n-1}x^2{}_n - 4a_0a_3x_n - 2a_0a_2x_{n-1}x_n = 4a_0a_3x_{n-1} + 4a_1a_3 - a^2{}_2$$

le quali sottratte l'una dall'altra danno :

$$a^2_0 x^2_{n-1}(x_n + x_{n-2}) = 4a_0a_3 + 2a_0a_2x_{n-1}.$$

ed anche per la prima delle superiori :

$$a^2_0 x_n x^2_{n-1} x_{n-2} = a^2_2 - 4a_1a_3 - 4a_0a_3x_{n-1}.$$

Quindi :

$$x_n = \frac{4a_0a_2(\alpha - x_{n-1})}{a^2_0 x_{n-2} x^2_{n-1}}$$

per mezzo della quale conoscendosi i valori di x_3, x_4 che sono α, β si ottengono di seguito quelli di x_5, x_6 ... Osservando i risultati superiori è evidente che se :

$$a^2_2 - 4a_1a_3 = 0$$

i triangoli inscritti nella conica $U = 0$ saranno circoscritti alla $V = 0$; se :

$$8a_0a^2_3 + a^3_2 - 4a_1a_2a_3 = 0$$

i quadrilateri inscritti nella conica $U = 0$ saranno circoscrivibili alla $V = 0$ e così via.

Notiamo da ultimo che supponendo nella (4) $x_3 = h$ costante si ha la equazione alle derivate :

$$\frac{dx_1}{\Delta(x_1)} + \varepsilon \frac{dx_2}{\Delta(x_2)} = 0$$

e le equazioni (5) (6) sono i noti integrali razionale ed irrazionale della medesima.

Giugno 1857.

SULLA TRASFORMAZIONE DELLE FUNZIONI ELLITTICHE

NOTA

DEL PROF. F. BRIOSCHI.

(*Continuazione Vedi pag.* 70.)

I valori dei coefficienti B_0, B_1 . . . $B_{\frac{n-1}{2}}$ si ottengono nel modo seguente. Supponendo p, η due numeri intieri facciasi:

$$\rho b_2 - \eta a_2 = \mu \qquad \eta a_1 - \rho b_1 = \nu$$

$$\frac{\mu\gamma + \nu}{n} = \omega$$

Ponendo nella prima delle (15) $\varepsilon\omega$ (ε numero intero) in luogo di v; essendo:

$$(16) \qquad s(b_2\gamma - b_1) = nc \qquad s(a_1 - a_2\gamma) = n$$

si ha:

$$\Theta_0(s\varepsilon\omega) = \Theta_0[\varepsilon(\eta + \rho c)] = 0$$

e quindi

$$(17) \quad B_0\psi^{n-1}(\varepsilon\omega) + B_1\psi^{n-3}(\varepsilon\omega) + \ldots B_{\frac{n-1}{2}} = 0$$

Osserviamo che dalle relazioni:

$$\theta_0(v + \mu\gamma + \nu) = (-1)^{\mu+\nu}e^{-i\pi\mu(2v+2\nu+\mu\gamma)}\theta_0(v)$$

$$\theta_1(v + \mu\gamma + \nu = (-1)^{\mu}e^{-i\pi\mu(2v+2\nu+\mu\gamma)}\theta_1(v)$$

ottiensi evidentemente la equazione:

$$\psi(n\omega + v) = -(-1)^{\nu}\psi(-v)$$

la quale conduce alle seguenti:

$$\psi[(n-1)\omega] = -(-1)^{\nu}\psi(\omega) \ldots \psi\left(\frac{n+1}{2}\omega\right) = -(-1)^{\nu}\psi\left(\frac{n-1}{2}\omega\right).$$

Dunque le radici dell'equazione (17) saranno le :

$$\psi(\omega),\quad \psi(2\omega)\ .\ .\ .\ \psi\left(\frac{n-1}{2}\,\omega\right)$$

ed in conseguenza le (15) diventono :

$$e^{i\pi a_2 s v^2}\Theta_0(sv)=B_0\theta^n{}_1\psi(v)[\psi^2(v)-\psi^2(\omega)][\psi^2(v)-\psi^2(2\omega)]\ldots$$
$$[(\psi^2(v)-\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\,\omega\right)]$$
$$e^{\pi i a_2 s v^2}\Theta_1(sv)=B_0\theta^n{}_1 t[1-\psi^2(v)\psi^2(\omega)](1-\psi^2(v)\psi^2(2\omega)]\ .\ .\ .$$
$$[(1-\psi^2(v)\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\,\omega\right)]$$

dalle quali ponendo:

$$\frac{\Theta_0(v)}{\Theta_1(v)}=\Psi\,(v)$$

deducesi la :

$$(18)\quad \Psi(sv)=\frac{1}{t}\,\frac{\psi(v)[\psi^2(v)-\psi^2(\omega)]\ldots[\psi^2(v)-\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\,\omega\right)]}{[1-\psi^2(v)\psi^2(\omega)]\ldots[1-\psi^2(v)\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\,\omega\right)]}$$

Notiamo che avendosi facilmente in causa delle equazioni (16) la :

$$\Psi[s(v+\varepsilon\omega)]=\Psi(sv)$$

le espressioni :

$$\psi(v)\,,\ \ \psi(v+\omega)\,,\ \ \psi(v+2\omega)\ .\ .\ .\ \psi[v+(n-1)\omega]$$

sono le radici dell'equazione :

$$x[x^2-\psi^2(\omega)]\ldots[x^2-\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\,\omega\right)]-t\Psi(sv)[1-x^2\psi^2(\omega)]\ldots$$
$$[1-x^2\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\,\omega\right)]=0\,;$$

Quindi si avranno anche le due formole di trasformazione :

$$(19)\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Psi(sv)=\dfrac{1}{t}\dfrac{\psi(v)+\psi(v+\omega)+\ldots+\psi[v+(n-1)\omega]}{\psi^2(\omega)\psi^2(2\omega)\ldots\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\omega\right)}\\ (-1)^{n-1}\Psi(sv)=\dfrac{1}{t}\psi(v)\psi(v+\omega)\ldots\psi[v+(n-1)\omega].\end{cases}$$

6. Rimane ora a trovarsi la relazione fra i moduli. A ciò osserviamo che supposto a_2 essere pari si ha :

$$\Theta_0\left(v+\frac{a_2c}{2}\right)=(-1)^{\frac{a_2}{2}}e^{-i\pi\frac{a_2}{2}\left(2v+\frac{a_2}{2}c\right)}\Theta_0(v)$$

$$\Theta_0\left(v+\frac{b_2}{2}\right)=(-1)^{\frac{b_2-1}{2}}\Theta_0(v+\tfrac{1}{2})$$

per cui :

$$\Theta_0\left(v+\frac{s}{2}\right)=(-1)^{\frac{a_2+b_2-1}{2}}e^{-i\pi\frac{a_2}{2}\left(2v+b_2+\frac{a_2c}{2}\right)}\Theta_0(v+\tfrac{1}{2})$$

ed analogamente :

$$\Theta_1\left(v+\frac{s}{2}\right)=(-1)^{\frac{a_2}{2}}e^{-i\pi\frac{a_2}{2}\left(2v+b_2+\frac{a_2c}{2}\right)}\Theta_1(v+\tfrac{1}{2})$$

Quindi sarà :

$$\Psi\left(\frac{s}{2}\right)=(-1)^{\frac{b_2-1}{2}}\Psi(\tfrac{1}{2})$$

e la (18) nella quale pongasi $v=\frac{1}{2}$ darà la relazione richiesta :

$$(20)\ (-1)^{\frac{\frac{b}{2}-1}{2}}\Psi(\tfrac{1}{2})=\frac{1}{t}\frac{\psi(\frac{1}{2})(\psi^2(\frac{1}{2})-\psi^2(\omega))\ldots[\psi^2(\frac{1}{2})-\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\omega\right)]}{(1-\psi^2(\frac{1}{2})\psi^2(\omega))\ldots[1-\psi^2(\frac{1}{2})\psi^2\left(\frac{n-1}{2}\omega\right)]}.$$

Le formole (18) (19) (20) ponno farsi coincidere facilmente con quelle di Jacobi e di Abel. Aggiungiamo che quest'ultimo geometra ottenne in una delle sue memorie (XIV del Vol. 1 delle opere) le formole di trasformazione per mezzo di una relazione fra gli indici di periodicità analoga alla (6) e dello sviluppo delle funzioni inverse per prodotti infiniti.

7. Accenniamo da ultimo brevemente ad un nuovo modo di presentare la soluzione del problema della trasformazione delle funzioni Ellittiche dovuto al Sig. Hermite; pel qual modo, (principalmente però nel caso delle funzioni Abeliane) questa teorica viene a legarsi a quella delle forme. Posto $v = y + \gamma x$ ed:

$$X = a_1 x + a_2 y \;, \qquad Y = b_1 x + b_2 y$$

si hanno le:

$$sv = Y + c X \;, \qquad a_2 s v^2 = a_2 (Y + c X)(y + \gamma x) = a_2 \varphi \;;$$

quindi facendo:

$$\theta(y + \gamma x) = f_{\nu, q}(x, y, \gamma) \;, \qquad \Theta(Y + cX) = f_{\mu, p}(X, Y, c)$$

si avrà che la funzione:

$$e^{a_2 \varphi} f_{\mu, p}(X, Y, c)$$

è esprimibile mediante una funzione omogenea di grado n di due funzioni $f_{\nu, q}(x, y, \gamma,)$; sussistendo fra i moduli c, γ la relazione (6) e fra gli argomenti X, Y; x, y le (21).

---

pag. 73 linea 17 leggasi.

$$\Pi(v + 1) = (-1)^{a\nu_0 + b\nu_1} \Pi(v)$$

$$\Pi(v + \gamma) = (-1)^{aq_0 + bq_1} e^{-i\pi n(2v + \gamma)} \Pi(v)$$

$$H(-v) = (-1)^{a\nu_0 q_0 + b\nu_1 q_1} \Pi(v).$$

SULLA TEORICA DELLE COORDINATE CURVILINEE E SUL LUOGO DE' CENTRI DI CURVATURA D'UNA SUPERFICIE QUALUNQUE.

NOTA

DEL PROF. DELFINO CODAZZI

Divido questa Memoria in due parti. Nella prima considero le proprietà d'un sistema triplo qualunque di superficie ortogonali, assumendo come coordinate curvilinee i tre parametri delle medesime, e pervengo brevemente a'valori, già trovati dal sig. Lamé, de' sei raggi di curvatura relativi ad un punto qualunque dello spazio. In seguito esprimo le proprietà d' una linea qualsivoglia per mézzo delle stesse coordinate curvilinee, ed ottengo alcune formole, delle quali sono casi particolari le note equazioni d'una linea tracciata in una superficie. Nella seconda parte considero il sistema triplo particolare, in cui le superficie d'una famiglia sono parallele, e pervengo ad alcune proprietà già trovate dal sig. Prof. Bordoni. Di poi stabilisco le formole, che valgono a determinare il luogo de' centri di curvatura d' una superficie qualsivoglia, e fo l' applicazione delle medesime ad alcuni casi particolari, cominciando co' due già noti e trattati da Monge.

PARTE PRIMA

Formole generali.

1. Le x, y, z, coordinate rettangole d'un punto qualunque dello spazio, sieno funzioni di tre nuove variabili λ, μ, ν; le equazioni

$$\lambda = \text{cost.}\ ,\ \mu = \text{cost.}\ ,\ \nu = \text{cost.}$$

esprimeranno tre famiglie di superficie. Ora, le superficie

di queste tre famiglie si chiamino ordinatamente *superficie coordinate delle* $\mu\nu$, *delle* $\nu\lambda$, *delle* $\lambda\mu$; e le intersezioni tra le superficie delle famiglie seconda e terza, terza e prima, prima e seconda si chiamino ordinatamente *assi curvilinei delle* λ, *delle* μ, *delle* ν. Inoltre, indicando con i una qualunque delle variabili λ, μ, ν, sieno a_i, b_i, c_i i coseni degli angoli, che la tangente all'asse curvilineo delle i fa ordinatamente co' tre assi rettilinei delle x, delle y, delle z. Le superficie delle tre famiglie si ritengano ortogonali tra di loro; i nove coseni soddisferanno alle seguenti note equazioni

$$a^2_\lambda+b^2_\lambda+c^2_\lambda=1,\quad a^2_\mu+b^2_\mu+c^2_\mu=1,\quad a^2_\nu+b^2_\nu+c^2_\nu=1,$$

$$a_\lambda a_\mu+b_\lambda b_\mu+c_\lambda c_\mu=0,\quad a_\mu a_\nu+b_\mu b_\nu+c_\mu c_\nu=0,\quad a_\nu a_\lambda+b_\nu b_\lambda+c_\nu c_\lambda=0,$$

$$a^2_\lambda+a^2_\mu+a^2_\nu=1,\quad b^2_\lambda+b^2_\mu+b^2_\nu=1,\quad c^2_\lambda+c^2_\mu+c^2_\nu=1,$$

$$a_\lambda b_\lambda+a_\mu b_\mu+a_\nu b_\nu=0,\quad b_\lambda c_\lambda+b_\mu c_\mu+b_\nu c_\nu=0,\quad c_\lambda a_\lambda+c_\mu a_\mu+c_\nu a_\nu=0,$$

$$a_\lambda=b_\mu c_\nu-b_\nu c_\mu,\quad b_\lambda=c_\mu a_\nu-c_\nu a_\mu,\quad c_\lambda=a_\mu b_\nu-a_\nu b_\mu,$$

$$a_\mu=b_\nu c_\lambda-b_\lambda c_\nu,\quad b_\mu=c_\nu a_\lambda-c_\lambda a_\nu,\quad c_\mu=a_\nu b_\lambda-a_\lambda b_\nu,$$

$$a_\nu=b_\lambda c_\mu-b_\mu c_\lambda,\quad b_\nu=c_\lambda a_\mu-c_\mu a_\lambda,\quad c_\nu=a_\lambda b_\mu-a_\mu b_\lambda.$$

Si chiamino l, m, n le derivate degli assi curvilinei delle λ, delle μ, delle ν prese ordinatamente rispetto alle variabili λ, μ, ν. Fra le derivate parziali delle x, y, z, le derivate degli assi curvilinei ed i nove coseni delle tangenti sussisteranno le seguenti pure note equazioni

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{d\lambda}=la_\lambda\,,\ \dfrac{dy}{d\lambda}=lb_\lambda\,,\ \dfrac{dz}{d\lambda}=lc_\lambda\,, \\ \dfrac{dx}{d\mu}=ma_\mu,\ \dfrac{dy}{d\mu}=mb_\mu,\ \dfrac{dz}{d\mu}=mc_\mu\,, \\ \dfrac{dx}{d\nu}=na_\nu\,,\ \dfrac{dy}{d\nu}=nb_\nu\,,\ \dfrac{dz}{d\nu}=nc_\nu\,. \end{array}\right.$$

Siccome le superficie coordinate compongono un sistema triplo ortogonale, così pel teorema di Dupin gli assi curvilinei saranno loro linee di curvatura. Si chiamino L_{i}, $M_{i'}$, $N_{i''}$, i raggi di curvatura delle superficie coordinate delle $\mu\nu$, $\nu\lambda$, $\lambda\mu$ ordinatamente relativi agli assi curvilinei delle i, delle i', delle i''; ove i dinota una qualunque delle variabili μ, ν; i' una qualunque delle ν, λ; i'' una qualunque delle λ, μ. È noto ([1]) che tra sei raggi di curvatura, le tre derivate degli assi curvilinei ed i nove coseni delle tangenti hanno luogo le equazioni

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{da_\lambda}{d\mu} &= -\frac{m}{L_\mu}a_\mu, & \frac{db_\lambda}{d\mu} &= -\frac{m}{L_\mu}b_\mu, & \frac{dc_\lambda}{d\mu} &= -\frac{m}{L_\mu}c_\mu, \\ \frac{da_\lambda}{d\nu} &= -\frac{n}{L_\nu}a_\nu, & \frac{db_\lambda}{d\nu} &= -\frac{n}{L_\nu}b_\nu, & \frac{dc_\lambda}{d\nu} &= -\frac{n}{L_\nu}c_\nu; \end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{da_\mu}{d\nu} &= -\frac{n}{M_\nu}a_\nu, & \frac{db_\mu}{d\nu} &= -\frac{n}{M_\nu}b_\nu, & \frac{dc_\mu}{d\nu} &= -\frac{n}{M_\nu}c_\nu, \\ \frac{da_\mu}{d\lambda} &= -\frac{l}{M_\lambda}a_\lambda, & \frac{db_\mu}{d\lambda} &= -\frac{l}{M_\lambda}b_\lambda, & \frac{dc_\mu}{d\lambda} &= -\frac{l}{M_\lambda}c_\lambda; \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{da_\nu}{d\lambda} &= -\frac{l}{N_\lambda}a_\lambda, & \frac{db_\nu}{d\lambda} &= -\frac{l}{N_\lambda}b_\lambda, & \frac{dc_\nu}{d\lambda} &= -\frac{l}{N_\lambda}c_\lambda, \\ \frac{da_\nu}{d\mu} &= -\frac{m}{N_\mu}a_\mu, & \frac{db_\nu}{d\mu} &= -\frac{m}{N_\mu}b_\mu, & \frac{dc_\nu}{d\mu} &= -\frac{m}{N_\mu}c_\mu. \end{aligned}\right.$$

2. Esprimo i sei raggi di curvatura in funzioni delle l, m, n e delle loro derivate parziali. Il confronto tra le prime tre (2) derivate rispetto a ν e le ultime tre (2) derivate rispetto a μ produce

([1]) V. la Memoria del sig. Prof. Brioschi: *Intorno ad alcune proprietà di una linea tracciata sopra una superficie* stampata in questi Annali nel 1854.

$$a_\mu \frac{d\frac{m}{L_\mu}}{d\nu} + \frac{m}{L_\mu}\frac{da_\mu}{d\nu} = a_\nu \frac{d\frac{n}{L_\nu}}{d\mu} + \frac{n}{L_\nu}\frac{da_\nu}{d\mu},$$

$$b_\mu \frac{d\frac{m}{L_\mu}}{d\nu} + \frac{m}{L_\mu}\frac{db_\mu}{d\nu} = b_\nu \frac{d\frac{n}{L_\nu}}{d\mu} + \frac{n}{L_\nu}\frac{db_\nu}{d\mu},$$

$$c_\mu \frac{d\frac{m}{L_\mu}}{d\nu} + \frac{m}{L_\mu}\frac{dc_\mu}{d\nu} = c_\nu \frac{d\frac{n}{L_\nu}}{d\mu} + \frac{n}{L_\nu}\frac{dc_\nu}{d\mu}.$$

Queste equazioni siano moltiplicate rispettivamente prima per a_μ, b_μ, c_μ, poi per a_ν, b_ν, c_ν, e sommate ciascuna volta; mediante le relazioni tra coseni e le (3), (4) risulteranno le prime due tra le seguenti

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{d\frac{m}{L_\mu}}{d\nu} = -\dfrac{m}{N_\mu}\dfrac{n}{L_\nu}, & \dfrac{d\frac{n}{L_\nu}}{d\mu} = -\dfrac{m}{L_\mu}\dfrac{n}{M_\nu}, \\ \dfrac{d\frac{n}{M_\nu}}{d\lambda} = -\dfrac{n}{L_\nu}\dfrac{l}{M_\lambda}, & \dfrac{d\frac{l}{M_\lambda}}{d\nu} = -\dfrac{n}{M_\nu}\dfrac{l}{N_\lambda}, \\ \dfrac{d\frac{l}{N_\lambda}}{d\mu} = -\dfrac{l}{M_\lambda}\dfrac{m}{N_\mu}, & \dfrac{d\frac{m}{N_\mu}}{d\lambda} = -\dfrac{l}{N_\lambda}\dfrac{m}{L_\mu}, \end{array} \right.$$

Risultano le altre quattro operando in modo analogo sulle (3), (4).

Dopo avere sostituiti ne' secondi membri delle (2) invece de' coseni i valori dati dalle (1), si derivino le prime tre rispetto a ν, le ultime tre rispetto a μ, ed il confronto tra le equazioni risultanti fornirà

$$\frac{dx}{d\mu}\frac{d\frac{1}{L_\mu}}{d\nu}+\frac{1}{L_\mu}\frac{d^2x}{d\mu d\nu}=\frac{dx}{d\nu}\frac{d\frac{1}{L_\nu}}{d\mu}+\frac{1}{L_\nu}\frac{d^2x}{d\mu d\nu},$$

$$\frac{dy}{d\mu}\frac{d\frac{1}{L_\mu}}{d\nu}+\frac{1}{L_\mu}\frac{d^2y}{d\mu d\nu}=\frac{dy}{d\nu}\frac{d\frac{1}{L_\nu}}{d\mu}+\frac{1}{L_\nu}\frac{d^2y}{d\mu d\nu},$$

$$\frac{dz}{d\mu}\frac{d\frac{1}{L_\mu}}{d\nu}+\frac{1}{L_\mu}\frac{d^2z}{d\mu d\nu}=\frac{dz}{d\nu}\frac{d\frac{1}{L_\nu}}{d\mu}+\frac{1}{L_\nu}\frac{d^2z}{d\mu d\nu}.$$

Le relazioni tra coseni unitamente alle (1) danno

$$\frac{dx}{d\mu}\frac{dx}{d\nu}+\frac{dy}{d\mu}\frac{dy}{d\nu}+\frac{dz}{d\mu}\frac{dz}{d\nu}=0,$$

$$\left(\frac{dx}{d\mu}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\mu}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\mu}\right)^2=m^2,\ \left(\frac{dx}{d\nu}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\nu}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\nu}\right)^2=n^2;$$

seguono da queste

$$\frac{dx}{d\mu}\frac{d^2x}{d\mu d\nu}+\frac{dy}{d\mu}\frac{d^2y}{d\mu d\nu}+\frac{dz}{d\mu}\frac{d^2z}{d\mu d\nu}=m\frac{dm}{d\nu},$$

$$\frac{dx}{d\nu}\frac{d^2x}{d\mu d\nu}+\frac{dy}{d\nu}\frac{d^2y}{d\mu d\nu}+\frac{dz}{d\nu}\frac{d^2z}{d\mu d\nu}=n\frac{dn}{d\mu}.$$

Ora, le equazioni antecedenti moltiplicate rispettivamente prima per $\frac{dx}{d\mu}$, $\frac{dy}{d\mu}$, $\frac{dz}{d\mu}$, poi per $\frac{dx}{d\nu}$, $\frac{dy}{d\nu}$, $\frac{dz}{d\nu}$, e sommate ciascuna volta somministrano le prime due tra le seguenti

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\frac{m}{L_\mu}}{d\nu} = \frac{\frac{dm}{d\nu}}{L_\nu}, \qquad \frac{d\frac{n}{L_\nu}}{d\mu} = \frac{\frac{dn}{d\mu}}{L_\mu}, \\ &\frac{d\frac{n}{M_\nu}}{d\lambda} = \frac{\frac{dn}{d\lambda}}{M_\lambda}, \qquad \frac{d\frac{l}{M_\lambda}}{d\nu} = \frac{\frac{dl}{d\nu}}{M_\nu}, \\ &\frac{d\frac{l}{N_\lambda}}{d\mu} = \frac{\frac{dl}{d\mu}}{N_\mu}, \qquad \frac{d\frac{m}{N_\mu}}{d\lambda} = \frac{\frac{dm}{d\lambda}}{N_\lambda}. \end{aligned} \right.$$

Le altre quattro s' ottengono operando in modo analogo sulle (3), (4).

Dalle (5), (6) si concludono immediatamente

$$(7)\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{N_\mu} = -\frac{1}{n}\frac{d\log m}{d\nu}, \quad \frac{1}{M_\nu} = -\frac{1}{m}\frac{d\log n}{d\mu}, \quad \frac{1}{L_\nu} = -\frac{1}{l}\frac{d\log n}{d\lambda}, \\ &\frac{1}{N_\lambda} = -\frac{1}{n}\frac{d\log l}{d\nu}, \quad \frac{1}{M_\lambda} = -\frac{1}{m}\frac{d\log l}{d\mu}, \quad \frac{1}{L_\mu} = -\frac{1}{l}\frac{d\log m}{d\lambda}. \end{aligned} \right.$$

Questi sono i valori de' sei raggi di curvatura.

Eliminando i raggi di curvatura dalle (6) per mezzo delle (7) si trovano dopo alcune riduzioni

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2 l}{d\mu d\nu} = \frac{1}{m}\frac{dm}{d\nu}\frac{dl}{d\mu} + \frac{1}{n}\frac{dn}{d\mu}\frac{dl}{d\nu}, \\ &\frac{d^2 m}{d\nu d\lambda} = \frac{1}{n}\frac{dn}{d\lambda}\frac{dm}{d\nu} + \frac{1}{l}\frac{dl}{d\nu}\frac{dm}{d\lambda}, \\ &\frac{d^2 n}{d\lambda d\mu} = \frac{1}{l}\frac{dl}{d\mu}\frac{dn}{d\lambda} + \frac{1}{m}\frac{dm}{d\lambda}\frac{dn}{d\mu}; \end{aligned} \right.$$

le quali esprimono relazioni fra le tre quantità l, m, n, e le derivate loro parziali.

Il sig. Lamé, seguendo un' altra via, era già pervenuto a' valori (7) ed alle relazioni (8). [1]

Aggiungo anche le formole valevoli per la quadratura d' una parte qualunque di superficie coordinata, e per la cubatura d' un solido qualunque. Chiamando A_λ A_μ A_ν ordinatamente l'area d'una parte qualsivoglia di una superficie coordinata delle $\mu\nu$, delle $\nu\lambda$. delle $\lambda\mu$, avremo evidentemente

$$(9) \qquad A_\lambda=\int\int mnd\mu d\nu \;, \; A_\mu=\int\int nld\nu d\lambda \;, \; A_\nu=\int\int lmd\lambda d\mu \;;$$

e chiamando V il volume d' un solido qualsivoglia, avremo pure evidentemente

$$(10) \qquad V=\int\int\int lmn \, d\lambda d\mu d\nu \;;$$

purchè tutti questi integrali siano debitamente estesi.

3. Considero la direzione della tangente ad una linea qualunque sì rispetto agli assi rettilinei delle x, delle y, delle z, che rispetto agli assi curvilinei delle λ, delle μ, delle ν.

Le quantità λ, μ, ν relative a' vari punti della linea saranno funzioni d'una stessa variabile principale; s' indichino con apici le derivate totali prese rispetto a questa, e si denomini s l' arco della linea. I coseni degli angoli formati dalla tangente co' tre assi rettilinei sono

$$\frac{x'}{s'} \;, \; \frac{y'}{s'} \;, \; \frac{z'}{s'} \;,$$

ma stando alle (1)

$$x'=a_\lambda l\lambda'+a_\mu m\mu'+a_\nu n\nu' \;, \; y'=b_\lambda l\lambda'+b_\mu m\mu'+b_\nu n\nu'$$

$$z'=c_\lambda l\lambda'+c_\mu m\mu'+c_\nu n\nu' \;;$$

dalle quali mediante le relazioni tra' coseni si conclude

[1] V. la Memoria del sig. Lamé: *Sur les coordonnées curvilignes*, stampata nel t. 5º del *Journal de Liouville*.

$$s'^2 = l^2\lambda'^2 + m^2\mu'^2 + n^2\nu'^2 \,. \tag{11}$$

Perciò risulteranno

$$\frac{x'}{s'} = \frac{1}{s'}(a_\lambda l\lambda' + a_\mu m\mu' + a_\nu n\nu') \,,\ \frac{y'}{s'} = \frac{1}{s'}(b_\lambda l\lambda' + b_\mu m\mu' + b_\nu n\nu') \,, \tag{12}$$

$$\frac{z'}{s'} = \frac{1}{s'}\,(c_\lambda l\lambda' + c_\mu m\mu' + c_\nu n\nu') \,;$$

ne'secondi membri s' intenderà posto invece di s' il suo valore. In seguito, chiamando α_λ, α_μ, α_ν, i coseni degli angoli formati dalla tangente con gli assi curvilinei delle λ, delle μ, delle ν, saranno

$$\alpha_\lambda = \frac{1}{s'}\,(a_\lambda x' + b_\lambda y' + c_\lambda z') \,,\ \alpha_\mu = \frac{1}{s'}\,(a_\mu x' + b_\mu y' + c_\mu z') \,,$$

$$\alpha_\nu = \frac{1}{s'}\,(a_\nu x' + b_\nu y' + c_\nu z') \,;$$

le quali, per mezzo delle (12) e delle relazioni tra' coseni, diventano

$$\alpha_\lambda = \frac{l\lambda'}{s'} \,,\ \alpha_\mu = \frac{m\mu'}{s'} \,,\ \alpha_\nu = \frac{n\nu'}{s'} \,. \tag{13}$$

Trovo le derivate delle deviazioni delle tangenti a' tre assi curvilinei, ovvero, ciò ch' è lo stesso, delle normali alle tre superficie coordinate, lungo la linea qualsivoglia d' arco s.

In primo luogo formo i valori delle nove derivate parziali

$$\frac{da_\lambda}{d\lambda} \,,\ \frac{db_\lambda}{d\lambda} \,,\ \frac{dc_\lambda}{d\lambda} \,;\ \frac{da_\mu}{d\mu} \,,\ \frac{db_\mu}{d\mu} \,,\ \frac{dc_\mu}{d\mu} \,;\ \frac{da_\nu}{d\nu} \,,\ \frac{db_\nu}{d\nu} \,,\ \frac{dc_\nu}{d\nu} \,.$$

Le relazioni tra' coseni mediante la derivazione rispetto a λ forniscono

$$a_\lambda \frac{da_\lambda}{d\lambda} + b_\lambda \frac{db_\lambda}{d\lambda} + c_\lambda \frac{dc_\lambda}{d\lambda} = 0 \,,$$

$$a_\mu \frac{da_\lambda}{d\lambda} + b_\mu \frac{db_\lambda}{d\lambda} + c_\mu \frac{dc_\lambda}{d\lambda} = \frac{l}{M_\lambda} \,,$$

$$a_\nu \frac{da_\lambda}{d\lambda} + b_\nu \frac{db_\lambda}{d\lambda} + c_\nu \frac{dc_\lambda}{d\lambda} = \frac{l}{N_\lambda} ;$$

dalle quali si deducono le prime tre delle seguenti

$$(14) \begin{cases} \frac{da_\lambda}{d\lambda} = l\left(\frac{a_\mu}{M_\lambda} + \frac{a_\nu}{N_\lambda}\right), \frac{db_\lambda}{d_\lambda} = l\left(\frac{b_\mu}{M_\lambda} + \frac{b_\nu}{N_\lambda}\right), \\ \qquad \frac{dc_\lambda}{d\lambda} = l\left(\frac{c_\mu}{M_\lambda} + \frac{c_\nu}{N_\lambda}\right), \\ \frac{da_\mu}{d\mu} = m\left(\frac{a_\nu}{N_\mu} + \frac{a_\lambda}{L_\mu}\right), \frac{db_\mu}{d\mu} = m\left(\frac{b_\nu}{N_\mu} + \frac{b_\lambda}{L_\mu}\right), \\ \qquad \frac{dc_\mu}{d\mu} = m\left(\frac{c_\nu}{N_\mu} + \frac{c_\lambda}{L_\mu}\right), \\ \frac{da_\nu}{d\nu} = n\left(\frac{a_\lambda}{L_\nu} + \frac{a_\mu}{M_\nu}\right), \frac{db_\nu}{d\nu} = n\left(\frac{b_\lambda}{L_\nu} + \frac{b_\mu}{M_\nu}\right), \\ \qquad \frac{dc_\nu}{d\nu} = n\left(\frac{c_\lambda}{L_\nu} + \frac{c_\mu}{M_\nu}\right). \end{cases}$$

Le altre sei si deducono in modo analogo derivando le relazioni tra' coseni rispetto a μ, ν.

In secondo luogo formo i valori delle nove derivate totali a'_λ, b'_λ, c'_λ, a'_μ, b'_μ, c'_μ, a'_ν b'_ν c'_ν. Ponendo per brevità

$$(15) \quad T_{\lambda,\mu} = \frac{\alpha_\lambda}{M_\lambda} - \frac{\alpha_\mu}{L_\mu}, \quad T_{\mu,\nu} = \frac{\alpha_\mu}{N_\mu} - \frac{\alpha_\nu}{M_\nu}, \quad T_{\nu,\lambda} = \frac{\alpha_\nu}{L_\nu} - \frac{\alpha_\lambda}{N_\lambda};$$

si vede facilmente che le

$$a'_\lambda = \frac{da_\lambda}{d\lambda}\lambda' + \frac{da_\lambda}{d\mu}\mu' + \frac{da_\lambda}{d\nu}\nu', \quad b'_\lambda = \frac{db_\lambda}{d\lambda}\lambda' + \frac{db_\lambda}{d\mu}\mu' + \frac{db_\lambda}{d\nu}\nu'.$$

$$c'_\lambda = \frac{dc_\lambda}{d\lambda}\lambda' + \frac{dc_\lambda}{d\mu}\mu' + \frac{dc_\lambda}{d\nu}\nu'$$

mediante (2), (13), (14) diventano le prime tre delle seguenti

$$
(16)\left\{\begin{array}{l}
a'_\lambda = s'(a_\mu T_{\lambda,\mu} - a_\nu T_{\nu,\lambda}) \,,\; b'_\lambda = s'(b_\mu T_{\lambda,\mu} - b_\nu T_{\nu,\lambda}) \,, \\
\qquad c'_\lambda = s'(c_\mu T_{\lambda,\mu} - c_\nu T_{\nu,\lambda}) \,. \\
a'_\mu = s'(a_\nu T_{\mu,\nu} - a_\lambda T_{\lambda,\mu}) \,,\; b'_\mu = s'(b_\nu T_{\mu,\nu} - b_\lambda T_{\lambda,\mu}) \,, \\
\qquad c'_\mu = s'(c_\nu T_{\mu,\nu} - c_\lambda T_{\lambda,\mu}) \,. \\
a'_\nu = s'(a_\lambda T_{\nu,\lambda} - a_\mu T_{\mu,\nu}) \,,\; b'_\nu = s'(b_\lambda T_{\nu,\lambda} - b_\mu T_{\mu,\nu}) \,, \\
\qquad c'_\nu = s'(c_\lambda T_{\nu,\lambda} - c_\mu T_{\mu,}) \,.
\end{array}\right.
$$

Si deducono le altre sei coll' operare in modo analogo sopra i coseni a_μ, b_μ, c_μ, a_ν, b_ν, c_ν.

Ora si chiamino δ_λ, δ_μ, δ_ν ordinatamente le deviazioni delle normali alle superficie coordinate delle $\mu\nu$, delle $\nu\lambda$, delle $\lambda\mu$ lungo la linea; saranno come è noto,

$$
\delta'^2_\lambda = a'^2_\lambda + b'^2_\lambda + c'^2_\lambda \,,\; \delta'^2_\mu = a'^2_\mu + b'^2_\mu + c'^2_\mu \,,
$$
$$
\delta'^2_\nu = a'^2_\nu + b'^2_\nu + c'^2_\nu \,.
$$

Se ne' secondi membri si sostituiscono i valori forniti dalle (16) e si riducono le espressioni risultanti, si trovano

$$
(17)\left\{\begin{array}{l}
\delta'^2_\lambda = s'^2(T^2_{\lambda,\mu} + T^2_{\nu,\lambda}),\; \delta'^2_\mu = s'^2(T^2_{\mu,\nu} + T^2_{\lambda,\mu}), \\
\qquad \delta'^2_\nu = s'^2(T^2_{\nu,\lambda} + T^2_{\mu,\nu}).
\end{array}\right.
$$

Queste equazioni fanno conoscere le derivate delle deviazioni delle normali alle tre superficie coordinate lungo la linea.

Caso particolare delle (17) è la nota equazione relativa alle deviazioni delle normali ad una superficie lungo una linea qualunque tracciata in essa. Se la linea d'arco s esistesse in una delle superficie coordinate delle $\mu\nu$, formando l'angolo θ con la linea di curvatura $\nu = \text{cost.}$ della medesima, sarebbero

$$
\alpha_\lambda = 0 \,,\quad \alpha_\mu = \cos\theta \,,\quad \alpha_\nu = \operatorname{sen}\theta \,;
$$

e la prima (17) diverrebbe

$$\delta'^2_\lambda = s'^2\left(\frac{\cos^2\theta}{L^2_\mu} + \frac{\text{sen}^2\theta}{L_\nu^2}\right).$$

4. Due punti situati in due diverse superficie della famiglia $\lambda =$ cost. si diranno *corrispondenti*, quando saranno punti d'uno stesso asse curvilineo delle λ; due linee situate nelle medesime superficie si diranno *corrispondenti*, quando tutti i punti dell'una saranno corrispondenti de' vari punti dell'altra.

Espongo una relazione tra le tangenti trigonometriche degli angoli formati da due linee corrispondenti qualisivogliano con le linee pure corrispondenti di curvatura.

L'una superficie della famiglia $\lambda =$ cost. sia data da un valore λ^0 particolare del parametro, ed il valore di una quantità qualunque t relativa a vari punti della linea tracciata in essa si denoti con t^0; l'altra superficie sia data da un valore λ qualunque del parametro. Chiamando θ^0, θ gli angoli formati dalle due linee corrispondenti qualisivogliano con le rispettive linee di curvatura $\nu =$ cost., si dedurranno dalle (12)

$$\cos\theta^0 = \frac{m^0}{s^{0\prime}}\,\mu', \qquad \text{sen}\theta^0 = \frac{n^0}{s^{0\prime}}\,\nu',$$

$$\cos\theta = \frac{m}{s'}\,\mu', \qquad \text{sen}\theta = \frac{n}{s'}\,\nu';$$

perciò

$$\frac{m}{n^0}\,\text{tang}\theta^0 = \frac{\nu'}{\mu'}, \qquad \frac{m}{n}\,\text{tang}\theta = \frac{\nu'}{\mu'};$$

e finalmente

$$\text{(18)} \qquad \frac{m}{n}\,\text{tang}\theta = \frac{m^0}{n^0}\,\text{tang}\theta^0.$$

Trovo il valore della derivata della deviazione d'una retta, la quale incontri i vari punti d'uno stesso asse curvilineo

delle λ, e si conservi sempre tangente alle diverse linee corrispondenti d'uno stesso gruppo tracciate nelle superficie della famiglia $\lambda = \text{cost}$.

Si chiami D la deviazione di questa retta; e siano

$$\frac{x'}{s'}, \frac{y'}{s'}, \frac{z'}{s'}$$

i coseni degli angoli, che la tangente ad una qualsivoglia tra le linee corrispondenti fa co'tre assi rettilinei; avremo

$$\left(\frac{dD}{d\lambda}\right)^2 = \left(\frac{d\frac{x'}{s'}}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{y'}{s'}}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{z'}{s'}}{d\lambda}\right)^2 .$$

Le (12) forniscono, avvertendo che $\lambda' = 0$,

$$\frac{d\frac{x'}{s'}}{d\lambda} = \frac{1}{s'}\left[a_\mu \frac{dm}{d\lambda}\mu' + a_\nu \frac{dn}{d\lambda}\nu' - a_\lambda l\left(\frac{m\mu'}{M_\lambda} + \frac{n\nu'}{N_\lambda}\right)\right]$$
$$- \frac{1}{s'^2}(a_\mu m\mu' + a_\nu n\nu')\frac{ds'}{d\lambda},$$

$$\frac{d\frac{y'}{s'}}{d\lambda} = \frac{1}{s'}\left[b_\mu \frac{dm}{d\lambda}\mu' + b_\nu \frac{dn}{d\lambda}\nu' - b_\lambda l\left(\frac{m\mu'}{M_\lambda} + \frac{n\nu'}{N_\lambda}\right)\right]$$
$$- \frac{1}{s'^2}(b_\mu m\mu' + b_\nu n\nu')\frac{ds'}{d\lambda},$$

$$\frac{d\frac{z'}{s'}}{d\lambda} = \frac{1}{s'}\left[c_\mu \frac{dm}{d\lambda}\mu' + c_\nu \frac{dn}{d\lambda}\nu' - c_\lambda l\left(\frac{m\mu'}{M_\lambda} + \frac{n\nu'}{N_\lambda}\right)\right]$$
$$- \frac{1}{s'^2}(c_\mu m\mu' + c_\nu n\nu')\frac{ds'}{d\lambda};$$

perciò sarà

$$\left(\frac{dD}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{s'^2}\left[\left(\frac{dm}{d\lambda}\right)^2\mu'^2 + \left(\frac{dn}{d\lambda}\right)^2\nu'^2 + l^2\left(\frac{m\mu'}{M_\lambda} + \frac{n\nu'}{N_\lambda}\right)^2\right]$$

$$- 2\,\frac{\frac{ds'}{d\lambda}}{s'^3}\left(m\,\frac{dm}{d\lambda}\mu'^2 + n\frac{dn}{d\lambda}\,\nu'^2\right) + \frac{\left(\frac{ds'}{d\lambda}\right)^2}{s'^2};$$

la quale, osservando che

$$s'\frac{ds'}{d\lambda} = m\,\frac{dm}{d\lambda}\,\mu'^2 + n\,\frac{dn}{d\lambda}\,\nu'^2,$$

si riduce alla seguente

$$(19)\quad \left(\frac{dD}{d\lambda}\right)^2 = l^2\left(\frac{\cos\theta}{M_\lambda} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{N_\lambda}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\left(\frac{d\log n}{d\lambda} - \frac{d\log m}{d\lambda}\right)^2.$$

Questa espressione di $\left(\frac{dD}{d\lambda}\right)^2$ può mettersi sotto un altra forma; perciò si osservi che

$$l\left(\frac{\cos\theta}{M_\lambda} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{N_\lambda}\right) = -\frac{1}{s'}\left(\frac{dl}{d\mu}\,\mu' + \frac{dl}{d\nu}\,\nu'\right) = -\frac{l'}{s'}$$

inoltre

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{d\log n}{d\lambda} - \frac{d\log m}{d\lambda}\right) = \frac{d\theta}{d\lambda};$$

quindi sarà pure

$$(20)\qquad \left(\frac{dD}{d\lambda}\right)^2 = \frac{l'^2}{s'^2} + \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2.$$

5. Trovo la derivata degli angoli di contingenza della linea qualunque considerata nel n. 3.

Siano β_λ, β_μ, β_ν i coseni degli angoli formati ordinatamente dal raggio osculatore della linea cogli assi curvilinei delle λ, delle μ e delle ν; e siano γ_λ, γ_μ, γ_ν i coseni degli angoli formati ordinatamente dalla perpendicolare al piano osculatore con gli stessi assi. Questi sei coseni assieme agli

α_λ, α_μ, α_ν soddisferanno manifestamente ad equazioni affatto analoghe a quelle, alle quali soddisfacevano i coseni degli angoli compresi tra gli assi rettilinei e le tangenti agli assi curvilinei.

Ciò premesso, si chiami φ il complesso degli angoli di contigenza e si formi la derivata totale dell'equazione

$$a_\lambda \frac{x'}{s'} + b_\lambda \frac{y'}{s'} + c_\lambda \frac{z'}{s'} = \alpha_\lambda ;$$

avvertendo che

$$\frac{1}{\varphi'}\left(\frac{x'}{s'}\right)' ; \frac{1}{\varphi'}\left(\frac{y'}{s'}\right)' , \frac{1}{\varphi'}\left(\frac{z'}{s'}\right)'$$

sono i coseni degli angoli che la normale ordinaria fa coi tre assi rettilinei, si otterrà

$$\alpha'_\lambda - \beta_\lambda \varphi' = \frac{1}{s'}(a'_\lambda x' + b_\lambda y' + c'_\lambda z')$$

Questa equazione mediante le (12), (16) si riduce facilmente alla prima delle seguenti

$$\alpha'_\lambda - \beta_\lambda \varphi' = s'(\alpha_\mu T_{\lambda,\mu} - \alpha_\nu T_{\nu,\lambda}) ,$$
$$\alpha'_\mu - \beta_\mu \varphi' = s'(\alpha_\nu T_{\mu,\nu} - \alpha_\lambda T_{\lambda,\mu}) ,$$
$$\alpha'_\nu - \beta_\nu \varphi' = s'(\alpha_\lambda T_{\nu,\lambda} - \alpha_\mu T_{\mu,\nu}) ,$$

le altre due s' ottengono operando in modo analogo sulle equazioni

$$a_\mu \frac{x'}{s'} + b_\mu \frac{y'}{s'} + c_\mu \frac{z'}{s'} = \alpha_\mu , \quad a_\nu \frac{x'}{s'} + b_\nu \frac{y'}{s'} + c_\nu \frac{z'}{s'} = \alpha_\nu .$$

Le tre equazioni ottenute, quando sieno moltiplicate ordinatamente per α_λ, α_μ, α_ν, e sommate tra loro somministrano una equazione identica in causa delle relazioni tra coseni. Le stesse moltiplicate ordinatamente per β_λ, β_μ, β_ν, e sommate tra loro, danno la seguente

$$(21) \quad \varphi' = \beta_\lambda \alpha'_\lambda + \beta_\mu \alpha'_\mu + \beta_\nu \alpha'_\nu + s'(\gamma_\lambda T_{\mu,\nu} + \gamma_\mu T_{\nu,\lambda} + \gamma_\nu T_{\lambda,\mu})$$

la quale fa conoscere il valore della derivata degli angoli di contingenza. Infine le medesime moltiplicate ordinatamente per γ_λ, γ_μ, γ_ν, e sommate tra loro, somministrano

$$(22)\quad 0=\gamma_\lambda\alpha'_\lambda+\gamma_\mu\alpha'_\mu+\gamma_\nu\alpha'_\nu-s'(\beta_\lambda T_{\mu,\nu}+\beta_\mu T_{\nu,\lambda}+\beta_\nu T_{\lambda,\mu})\ ;$$

la quale serve a determinare uno degli angoli, che la normale ordinaria o la perpendicolare al piano osculatore fa coi tre assi curvilinei, venendo in seguito determinati gli altri mediante le relazioni tra coseni.

Se la linea è situata in una superficie, le (21), (22) forniscono come casi particolari la nota equazione d'Eulero ed un'altra equazione pure nota, la quale serve a determinare l'angolo compreso tra la normale ordinaria della linea e la normale della superficie. Esista la linea in una delle superficie coordinate delle $\mu\nu$ per cui $\alpha_\lambda=0$; le relazioni tra coseni danno facilmente

$$\alpha_\mu=\cos\theta\ ,\ \alpha_\nu=\mathrm{sen}\theta\ ,\ \beta_\lambda=\cos\omega\ ,\ \gamma_\lambda=\mathrm{sen}\omega\ ;$$

$$\beta_\mu=-\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\omega,\ \beta_\nu=\cos\theta\,\mathrm{sen}\omega,\ \gamma_\mu=\mathrm{sen}\theta\cos\omega,\ \gamma_\nu=-\cos\theta\cos\omega;$$

ove ω dinota l'angolo delle due normali. Per conseguenza le (21), (22) diventano

$$\varphi'=\mathrm{sen}\omega\left(\theta'-s'\frac{\cos\theta\frac{dm}{d\nu}-\mathrm{sen}\theta\frac{dn}{d\mu}}{mn}\right)+\cos\omega.s'\left(\frac{\cos^2\theta}{L_\mu}+\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{L_\nu}\right)\ ;$$

$$0=\cos\omega\left(\theta'-s'\frac{\cos\theta\frac{dm}{d\nu}-\mathrm{sen}\theta\frac{dn}{d\mu}}{mn}\right)-\mathrm{sen}\omega.s'\left(\frac{\cos^2\theta}{L_\mu}+\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{L_\nu}\right)\ ;$$

dalle quali si concludono le due

$$\frac{\varphi'\cos\omega}{s'}=\frac{\cos^2\theta}{L_\mu}+\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{L_\nu}\ ,$$

$$\frac{\varphi'\mathrm{sen}\omega}{s'}=\frac{\theta'}{s'}-\frac{\cos\theta\,\frac{dm}{d\nu}-\mathrm{sen}\theta\frac{dn}{d\mu}}{mn}$$

Determino gli angoli, che le normali ordinarie degli assi curvilinei delle μ e delle ν fanno con la normale a quella superficie della famiglia $\lambda =$ cost., nella quale essi giaciono cioè fanno con la tangente all'asse curvilineo delle λ. Denomino ordinatamente ω_μ, ω_ν questi due angoli; è chiaro che s'otterranno i valori loro ponendo successivamente nelle due ultime equazione $\theta = 0$, $\theta = \frac{1}{2}\pi$, ed eliminando φ' ciascuna volta. Si trovano in tal modo

$$(23) \qquad \operatorname{tang}\omega_\mu = -\frac{L_\mu \frac{dm}{d\nu}}{mn}; \quad \operatorname{tang}\omega_\nu = \frac{L_\nu \frac{dn}{d\mu}}{mn}.$$

6. Da ultimo trovo la derivata degli angoli di torsione della medesima linea qualunque.

Si chiami Ψ il complesso degli angoli di torsione; e si chiamino i_x i_y i_z i coseni degli angoli, che la perpendicolare al piano osculatore fa co'tre assi rettilinei delle x, delle y delle z; abbiamo per note formole

$$i'_x = \frac{\Psi'}{\varphi'}\left(\frac{x'}{s'}\right)', \qquad i'_y = \frac{\Psi'}{\varphi'}\left(\frac{y'}{s'}\right)', \qquad i'_z = \left(\frac{z'}{s'}\right)'.$$

Ora formando la derivata totale dell'equazione

$$i_x a_\gamma + i_y b_\lambda + i_z c_\lambda = \gamma_\lambda,$$

s'ottiene

$$\beta_\lambda \Psi' + i_x a'_\lambda + i_y b'_\lambda + i_z c'_\lambda = \gamma'_\lambda;$$

la quale per mezzo delle (16) si riduce facilmente alla prima delle seguenti

$$\beta_\lambda \Psi' - \gamma'_\lambda = s'(\gamma_\nu T_{\nu,\lambda} - \gamma_\mu T_{\lambda,\mu}),$$

$$\beta_\mu \Psi' - \gamma'_\mu = s'(\gamma_\lambda T_{\lambda,\mu} - \gamma_\nu T_{\mu,\nu}),$$

$$\beta_\nu \Psi' - \gamma'_\nu = s'(\gamma_\mu T_{\mu,\nu} - \gamma_\lambda T_{\nu,\lambda}).$$

Risultano le altre due coll'operare in modo analogo sulle equazioni

$$i_x a_\mu + i_y b_\mu + i_z c_\mu = \gamma_\mu \,, \qquad i_x a_\nu + i_y b_\nu + i_z c_\nu = \gamma_\nu .$$

Se si moltiplicano rispettivamente per α_λ, α_μ, α_ν le tre equazioni ottenute e si sommano tra loro, si trova un equazione la quale può trasformarsi nella (22) mediante le relazioni de' coseni. Se si moltiplicano le stesse rispettivamente per β_λ, β_μ, β_ν e si sommano tra loro, si trova la seguente

$$(24)\ \Psi' = \beta_\lambda \gamma'_\lambda + \beta_\mu \gamma'_\mu + \beta_\nu \gamma'_\nu - s'(\alpha_\lambda T_{\mu,\nu} + \alpha_\mu T_{\nu,\lambda} + \alpha_\nu T_{\lambda,\mu}) \,;$$

la quale fa conoscere il valore della derivata degli angoli di torsione. Infine se si moltiplicano le tre medesime equazioni rispettivamente per γ_λ, γ_μ, γ_ν e si sommano tra loro s'ottiene un'equazione identica in causa delle relazioni tra coseni.

Caso particolare della (24) è la nota equazione relativa agli angoli di torsione d'una linea tracciata in una superficie. Se la linea giace in una delle superficie coordinate delle $\mu\nu$, i nove coseni saranno espressi coi due angoli θ, ω come nel *n.* antecedente e la (24) si riduce alla seguente

$$\frac{\Psi' - \omega'}{s'} = \operatorname{sen}\theta \cos\theta \left(\frac{1}{L_\mu} - \frac{1}{L_\nu} \right) .$$

PARTE SECONDA. [1]

Luogo de' centri di curvatura d'una superficie qualunque.

1. Considero il caso particolare, nel quale gli assi delle λ sono linee rette. Allora i coseni a_λ, b_λ, c_λ saranno indipendenti da λ manifestamente; quindi le prime tre (14) daranno $\frac{1}{M_\lambda} = 0$, $\frac{1}{N_\lambda} = 0$, le quali esprimono la nota proprietà che le superficie delle famiglie $\mu = \text{cost.}$, $\nu = \text{cost.}$

[1] I numeri contenuti entro parentesi dinoteranno le equazioni della prima parte, ed i numeri senza parentesi dinoteranno quelle della seconda.

sono sviluppabili. In seguito le (7) forniscono $\frac{dl}{d\mu}=0$, $\frac{dl}{d\nu}=0$; le quali insegnano che gli assi delle λ contati da una superficie data qualunque della stessa famiglia λ=cost. sono funzioni di λ solamente, e quindi hanno costanti di lunghezza le parti loro intercette tra due superficie qualsivogliano della stessa famiglia. Perciò, chiamando parallele due superficie le quali abbiano comuni le normali ed abbiano eguali le parti di queste comprese tra esse, ha luogo la proprietà, già trovata dal Sig. Prof. Bordoni, che se due superficie hanno comuni le normali esse sono parallele.

Reciprocamente, se gli assi delle λ hanno eguali tra di loro le parti comprese tra due superficie qualsivogliano della famiglia λ = cost., essi sono linee rette. Difatto, in questo caso λ dev'essere indipendente sì da μ che da ν, per cui le (7) daranno $\frac{1}{M_\lambda}=0$, $\frac{1}{N_\lambda}=0$; queste equazioni insegnano che le superficie delle famiglie μ = cost., ν = cost., sono sviluppabili con le caratteristiche normali alle superficie della famiglia λ = cost.

Ora considero il sistema triplo particolare, in cui le superficie della famiglia λ = cost. sono parallele. Assumo per parametro λ la lunghezza della retta normale ad una individuata di queste superficie, per cui $l=1$; e dinoto con f^o il valore d'una quantità qualunque f riferita a vari punti di questa stessa superficie. Le prime tre (1) forniscono mediante l'integrazione

$$1.\quad x=x^o+\lambda a_\lambda\,,\quad y=y^o+\lambda b_\lambda\,,\quad z=z^o+\lambda c_\lambda\,;$$

ove x^o, y^o, z^o, funzioni delle sole μ, ν, saranno le coordinate rettangole della superficie individuata. Le (3), (4) insegnano che i coseni a_μ, b_μ, c_μ, a_ν, b_ν, c_ν sono indipendenti da λ; perciò le (2) somministrano

$$\frac{m}{L_\mu}=\frac{m^\circ}{L^\circ_\mu}, \quad \frac{n}{L_\nu}=\frac{n^\circ}{L^\circ_\nu}.$$

In seguito, formando le derivate parziali di una qualunque tra le 1 rispetto a μ ed a ν ed osservando le (1), (2), si trovano

2. $$m=m^\circ\left(1-\frac{\lambda}{L^\circ_\mu}\right), \quad n=n^\circ\left(1-\frac{\lambda}{L^\circ_\nu}\right);$$

perciò

3. $$L_\mu=L^\circ_\mu-\lambda, \quad L_\nu=L^\circ_\nu-\lambda.$$

Mediante questi valori la prima (9) e la (10) divengono

4. $$\begin{cases} A_\lambda=\iint\left(1-\frac{\lambda}{L^\circ_\mu}\right)\left(1-\frac{\lambda}{L^\circ_\nu}\right)m^\circ n^\circ d\mu d\nu, \\ V=\iiint\left(1-\frac{\lambda}{L^\circ_\mu}\right)\left(1-\frac{\lambda}{L^\circ_\nu}\right)m^\circ n^\circ d\mu d\nu d\lambda \end{cases}$$

e la (18) si muta nella

5. $$\text{tang}\theta=\frac{L^\circ_\mu}{L^\circ_\nu}\frac{L^\circ_\nu-\lambda}{L^\circ_\mu-\lambda}\,\text{tang}\theta^\circ.$$

Le relazioni 1, 2, 3, 4, 5 sono già state trovate con altro metodo del Sig. Prof. Bordoni.

Le (8), mediante la sostituzione de' valori 2, somministrano

6. $$\frac{d\frac{m^\circ}{L^\circ_\mu}}{d\nu}=\frac{\frac{dm^\circ}{d\nu}}{L^\circ_\nu}, \quad \frac{d\frac{n^\circ}{L^\circ_\nu}}{d\mu}=\frac{\frac{dn^\circ}{d\mu}}{L^\circ_\mu};$$

le quali, unitamente alle 2, 3, riducono le (23) alle seguenti

7. $$\text{tang}\omega_\mu=-\frac{L^\circ_\mu\frac{dm^\circ}{d\nu}}{m^\circ n^\circ}, \quad \text{tang}\omega_\nu=\frac{L^\circ_\nu\frac{dn^\circ}{d\mu}}{m^\circ n^\circ}.$$

Se si considerano due assi curvilinei delle μ, si vede che le rette sono tangenti ne' punti, in cui essi sono incontrati da

una stessa normale alla superficie individuata $\lambda = 0$, sono parallele, perchè formano con gli assi rettilinei angoli i coseni de' quali sono costanti rispetto a λ. Quindi i due assi curvilinei avranno comune in essi punti il piano normale. Segue dà ciò e dalla prima 7, che le normali ordinarie de' due assi in que' punti saranno parallele tra loro; ed analogamente per gli assi curvilinei delle ν.

2. Passo a considerare le superficie luoghi de' centri di curvatura d'una superficie qualunque data.

La (11) fornisce in generale

$$8. \quad s'^2 = \lambda'^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{L^\circ_\mu}\right)^2 m^{\circ 2} \mu'^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{L^\circ_\nu}\right)^2 n^{\circ 2} \nu'^2 ;$$

ora per la superficie in cui si trovano i centri de' raggi L°_μ dev'essere

$$9. \quad \gamma = L^\circ_\mu ;$$

perciò chiamando λ_μ il valore di λ relativo ad essa superficie, s_μ l'arco d'una linea qualunque tracciata nella medesima, risulterà

$$10. \quad s'^2_\mu = \lambda'^2_\mu + \left(1 - \frac{\lambda_\mu}{L^\circ_\mu}\right)^2 n^{\circ 2} \nu'^2 ;$$

ove, se si ritengono λ_μ, ν come coordinate curvilinee, si dovrà eliminare la μ contenuta nelle L°_ν, n° per mezzo della 9. La 10 insegna che le linee $\nu =$ cost. situate nella superficie dei centri sono geodetiche; si osservi inoltre che la 9 è l' equazione degli spigoli di regresso delle superficie sviluppabili $\nu =$ cost.; segue da ciò la nota proprietà che gli spigoli di regresso delle superficie sviluppabili $\nu =$ cost. sono geodetiche della superficie in cui si trovano i centri di L°_μ. La seconda (13) somministra qualunque sia la direzione della linea

$$\alpha_\mu = 0 ;$$

quindi abbiamo l' altra nota proprietà che le normali alle superficie sviluppabili $\mu =$ cost. sono pure normali alla su-

perficie luogo de' centri de' raggi L^o_μ, ovvero che le prime sono tangenti alla seconda.

Immagino i due punti, ne' quali una stessa normale alla data superficie incontra questa medesima ed il luogo de' centri I coseni degli angoli, che la normale ordinaria dell'asse curvilineo delle μ nel primo punto fa con l'asse delle λ e con l'asse curvilineo delle ν, saranno espressi da $\cos\omega_\mu$, $\text{sen}\,\omega_\mu$; i coseni degli angoli che l'arco s_μ qualunque nel secondo punto fa con l'asse delle λ e con l'asse curvilineo delle ν saranno espressi, come insegna la (10), da

$$\frac{\lambda'_\mu}{s'_\mu}, \quad \frac{\left(1-\frac{\lambda_\mu}{L^o_\nu}\right) n^o\nu'}{s'_\mu};$$

quindi l'angolo compreso tra la normale ordinaria suddetta e l'arco s_μ avrà per valore

$$\frac{1}{s'_\mu}\left[\lambda'_\mu\cos\omega_\mu + \left(1-\frac{\lambda_\mu}{L^o_\nu}\right) n^o\nu'\,\text{sen}\,\omega_\nu.\right]$$

Mediante la prima 6, la 7 e la 9 si trova facilmente

11. $$\lambda'_\mu = \frac{dL^o_\mu}{d\mu}\,\mu' - \left(1-\frac{L^o_\mu}{L^o_\nu}\right) n^o\nu'\,\text{tang}\,\omega_\mu;$$

per conseguenza il coseno di quell'angolo sarà espresso come segue

$$\frac{dL^o_\mu}{d\mu}\cos\omega_\mu \cdot \frac{\mu'}{s'_\mu}.$$

Se s_μ appartiene alla linea di contatto tra la superficie dei centri e la superficie sviluppabile μ=cost., è $\mu'=0$ e l'angolo diventa retto; quindi ha luogo la seguente proprietà: la retta tangente alla linea di contatto tra la superficie dei centri e la superficie sviluppabile μ = cost. unisce il centro della sfera di raggio L^o_μ col centro della circonferenza osculatrice dell'asse curvilineo delle μ situato nella data superficie. Questa proprietà può essere enunciata anche nel modo

seguente: in un punto qualunque della superficie de' centri lo spigolo di regresso e la linea di contatto comprendono un angolo, il quale è complemento di ω_μ. E poi facile concludere la nota proprietà che queste due linee sono a tangenti conjugate, perocchè la superficie sviluppabile tangente alla superficie de' centri lungo la seconda ha le caratteristiche tangenti alla prima.

Se si fosse considerata la superficie, in cui si trovano i centri delle sfere di raggi L°_ν, sarebbero risultate

$$12.\qquad \lambda_\nu = L^\circ_\nu\,, \qquad s'^2_\nu = \lambda'^2_\nu + \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{L^\circ_\mu}\right)^2 m^{\circ 2}\mu'^2;$$

ove λ_ν esprime il valore di λ per quella superficie, s_ν l'arco d'una linea qualunque tracciata nella medesima. Si avrebbe concluso che gli spigoli di regresso delle superficie sviluppabili μ=cost. sono geodetiche per la superficie de' centri; e che le superficie sviluppabili ν=cost. sono tangenti alla stessa. Infine, attribuendo a'coseni i debiti segni ed osservando che

$$13.\qquad \lambda'_\nu = \frac{dL^\circ_\nu}{d\nu}\,\nu' + \left(1 - \frac{L^\circ_\nu}{L^\circ_\mu}\right) m^\circ \mu' \operatorname{tang}\omega_\nu\;,$$

si avrebbe trovato che gli spigoli di regresso e le linee di contatto comprendono un angolo il quale è complemento di ω_ν, e che queste due linee sono a tangenti conjugate.

Mediante le 11, 13 esprimo i valori di s'_μ, s'_ν con le due stesse coordinate curvilinee μ, ν, ed ottengo

$$14.\qquad \begin{cases} s'^2_\mu = \left(\dfrac{dL^\circ_\mu}{d\mu}\right)^2 \mu'^2 - 2\,\dfrac{dL^\circ_\mu}{d\mu}\left(1 - \dfrac{L^\circ_\mu}{L^\circ_\nu}\right) n^\circ \operatorname{tang}\omega_\mu . \mu'\nu' \\ \qquad\qquad + \left(1 - \dfrac{L^\circ_\mu}{L^\circ_\nu}\right)^2 \dfrac{n^{\circ 2}}{\cos^2\omega_\mu} . \nu'^2\,, \\ s'^2_\nu = \left(\dfrac{dL^\circ_\nu}{d\nu}\right)^2 \nu'^2 + 2\,\dfrac{dL^\circ_\nu}{d\nu}\left(1 - \dfrac{L^\circ_\nu}{L^\circ_\mu}\right) m^\circ \operatorname{tang}\omega_\nu\, \nu'\mu' \\ \qquad\qquad \left(1 - \dfrac{L^\circ_\nu}{L^\circ_\mu}\right)^2 \dfrac{m^{\circ 2}}{\cos^2\omega_\nu} . \mu'^2 . \end{cases}$$

3. Determino ciò che risguarda l'incurvamento delle due linee d'archi s_μ, s_ν.

Osservo dapprima che le (15), quando le superficie della famiglia $\lambda =$ cost. sono parallele, diventano

15. $$\left\{\begin{aligned} T_{\lambda,\mu} &= -\frac{m^\circ}{L^\circ_\mu}\frac{\mu'}{s'}, \quad T_{\nu,\lambda} = \frac{n^\circ}{L^\circ_\nu}\frac{\nu'}{s'}, \\ T_{\mu,\nu} &= \frac{1}{m}\frac{dn}{d\mu}\frac{\nu'}{s'} - \frac{1}{n}\frac{dm}{d\nu}\frac{\mu'}{s'} \\ &= \frac{1}{m^\circ}\frac{dn^\circ}{d\mu}\frac{\nu'}{s'} - \frac{1}{n^\circ}\frac{dm^\circ}{d\nu}\frac{\mu'}{s'}. \end{aligned}\right.$$

Ora considero la linea qualunque d'arco s_μ, e denomino p_μ l'angolo formato da essa con l'asse delle λ cioè con la tangente allo spigolo di regresso, q_μ l'angolo formato dalla normale alla superficie in cui essa linea è tracciata. Avvertendo che $\alpha_\mu = 0$, le relazioni tra coseni danno facilmente

$$\alpha_\lambda = \cos p_\mu, \quad \alpha_\nu = \operatorname{sen} p_\mu, \quad \beta_\mu = \cos q_\mu, \quad \gamma_\mu = \operatorname{sen} q_\mu,$$
$$\beta_\lambda = \operatorname{sen} p_\mu \operatorname{sen} q_\mu, \quad \beta_\nu = -\cos p_\mu \operatorname{sen} q_\mu,$$
$$\gamma_\lambda = -\operatorname{sen} p_\mu \cos q_\mu, \quad \gamma_\nu = \cos p_\mu \cos q_\mu.$$

Mediante questi valori le (21), (22) dopo alcune riduzioni diventano

$$\varphi'_\mu = \operatorname{sen} q_\mu \left(\frac{n^\circ \nu'}{L^\circ_\nu} - p_\mu'\right)$$
$$- \cos q_\mu \left[\cos p_\mu \frac{m^\circ \mu'}{L^\circ_\mu} + \operatorname{sen} p_\mu \left(\frac{\nu'}{m^\circ}\frac{dn^\circ}{d\mu} - \frac{\mu'}{n^\circ}\frac{dm^\circ}{d\nu}\right)\right],$$

$$0 = \cos q_\mu \left(\frac{n^\circ \nu'}{L^\circ_\nu} - p_\mu'\right)$$
$$+ \operatorname{sen} q_\mu \left[\cos p_\mu \frac{m^\circ \mu'}{L^\circ_\mu} + \operatorname{sen} p_\mu \left(\frac{\nu'}{m^\circ}\frac{dn^\circ}{d\mu} - \frac{\mu'}{n^\circ}\frac{dm^\circ}{d\nu}\right)\right];$$

dalle quali si deducono

$$16.\quad \begin{cases} \varphi'_\mu \cos q_\mu = \operatorname{sen} p_\mu \left(\frac{\mu'}{n^\circ}\frac{dm^\circ}{d\nu} - \frac{\nu'}{m^\circ}\frac{dn^\circ}{d\mu}\right) - \cos p_\mu \frac{m^\circ \mu'}{L^\circ_\mu}, \\ \varphi'_\mu \operatorname{sen} q_\mu = \frac{n^\circ \nu'}{L^\circ_\nu} - p'_\mu ; \end{cases}$$

φ_μ dinota il complesso degli angoli di contingenza per la linea d'arco s_μ. Per mezzo degli stessi valori la (24) diviene dopo le riduzioni

$$17.\quad \Psi'_\mu - q'_\mu = \cos p_\mu \left(\frac{\mu'}{n^\circ}\frac{dm^\circ}{d\nu} - \frac{\nu'}{m^\circ}\frac{dn^\circ}{d\mu}\right) + \operatorname{sen} p_\mu \frac{m^\circ \mu'}{L^\circ_{\mu'}} ;$$

Ψ_μ dinota il complesso degli angoli di torsione per la linea d'arco s_μ. Queste equazioni fanno conoscere le quantità φ_μ, Ψ_μ, q_μ; perciò servono a determinare completamente tutto ciò che concerne l'incurvamento della linea qualunque situata nella superficie luogo de' centri de' raggi L°_μ.

Passando ora a considerare la linea d'arco s_ν, si chiamino ordinatamente p_ν, q_ν gli angoli che la tangente ad essa fa con l'asse delle λ e che la normale ordinaria della medesima fa con l'asse curvilineo delle ν. Siccome $\alpha_\nu = 0$, così saranno

$$\alpha_\lambda = \cos p_\nu ,\ \alpha_\mu = \operatorname{sen} p_\nu ,\ \beta_\nu = \cos q_\nu ,\ \gamma_\nu = \operatorname{sen} q_\nu ,$$

$$\beta_\lambda = - \operatorname{sen} p_\nu \operatorname{sen} q_\nu,\ \beta_\mu = \cos p_\nu \operatorname{sen} q_\nu ,$$

$$\gamma_\lambda = \operatorname{sen} p_\nu \cos q_\nu ,\ \gamma_\mu = - \cos p_\nu \cos q_\nu$$

Denominando φ_ν il complesso degli angoli di contingenza, si troveranno

$$18.\quad \begin{cases} \varphi'_\nu \cos q_\nu = \operatorname{sen} p_\nu \left(\frac{\nu'}{m^\circ}\frac{dn^\circ}{d\mu} - \frac{\mu'}{n^\circ}\frac{dm^\circ}{d\nu}\right) - \cos p_\nu \frac{n^\circ \nu'}{L^\circ_\nu}, \\ \varphi'_\nu \operatorname{sen} q_\nu = p'_\nu - \frac{m^\circ \mu'}{L^\circ_\mu} ; \end{cases}$$

e denominando Ψ_ν il complesso degli angoli di torsione si otterrà

$$19. \qquad q'_\nu - \Psi'_\nu = \cos p_\nu \left(\frac{\nu'}{m^\circ} \frac{dn^\circ}{d\mu} - \frac{\mu'}{n^\circ} \frac{dm^\circ}{d\nu} \right) + \operatorname{sen} p_\nu \frac{n^\circ \nu'}{L^\circ_\nu} .$$

Queste equazioni valgono a determinare completamente tutto ciò che concerne l'incurvamento della linea qualunque d'arco s_ν.

4°. Determino tutto ciò che risguarda l' incurvamento delle due superficie luoghi de' centri di curvatura della data qualunque.

L'incurvamento in un punto qualsivoglia della superficie, in cui si trovano i centri de' raggi L°_μ, sarà noto, quando si conosceranno le due linee di curvatura passanti per esso punto ed i valori de' due raggi di curvatura sferica nel medesimo punto. A determinare queste linee e questi raggi valgono le 16, 17 modificate nel seguente modo. Dividendo ciascun termine della 11 per s'_μ, essa può scriversi

$$20. \qquad \frac{dL^\circ_\mu}{d\mu} \frac{\mu'}{s'_\mu} = \frac{\cos(p_\mu - \omega_\mu)}{\cos \omega_\mu} ;$$

quindi la prima 16, dopo aver diviso ogni suo termine per s'_μ e dopo avere eseguite alcune riduzioni, diventa

$$\frac{\varphi'_\mu \cos q_\mu}{s'_\mu} = \frac{\operatorname{tang} \omega_\nu}{L^\circ_\mu - L^\circ_\nu} \operatorname{sen}^2 p_\mu - \frac{m^\circ}{L^\circ_\mu \frac{dL^\circ_\mu}{d\mu}} \frac{\cos^2(p_\mu - \omega_\mu)}{\cos^2 \omega_\mu}$$

Denomino h_μ il raggio della sfera tangente la superficie ed avente un contatto del second'ordine con la linea ν=cost. ovvero con la linea $p_\mu = 0$; questo raggio, essendo la linea geodetica, è pure raggio osculatore della medesima, ed ha per valore l'unità divisa pel secondo membro dell'equazione antecedente postovi $p_\mu = 0$; perciò

21. $$\frac{1}{h_\mu} = -\frac{m^\circ}{L^\circ_\mu \frac{dL^\circ_\mu}{d\mu}}.$$

Denomino k_μ il raggio della sfera tangente la superficie ed avente un contatto del second'ordine con la linea μ=cost. ovvero con la linea $p_\mu = \frac{1}{2}\pi + \omega_\mu$; si dedurrà dalla stessa equazione antecedente

22. $$\frac{1}{k} = \frac{\text{tang}\,\omega_\nu \cos^2\omega_\mu}{L^\circ_\mu - L^\circ_\nu}.$$

Mediante questi valori l'equazione superiore può scriversi come segue

23. $$\frac{\varphi'_\mu \cos q_\mu}{s'_\mu} = \frac{1}{\cos^2\omega_\mu}\left(\frac{\text{sen}^2 p_\mu}{k_\mu} + \frac{\cos^2(p_\mu - \omega_\mu)}{h_\mu}\right);$$

e parimenti la 17 dopo alcune riduzioni diviene

24. $$\frac{\Psi'_\mu - q'_\mu}{s'_\mu} = \frac{1}{\cos^2\omega_\mu}\left(\frac{\text{sen}\,p_\mu \cos p_\mu}{k_\mu} - \frac{\text{sen}(p_\mu - \omega_\mu)\cos(p_\mu - \omega_\mu)}{h_\mu}\right)$$

Ora, le linee di curvatura passanti pel punto di coordinate curvilinee μ, ν faranno con l'asse delle λ un angolo p_μ tale che renda massima o minima la quantità $\frac{\varphi'_\mu \cos q_\mu}{s'_\mu}$, ovvero tale che renda, com' è noto, nulla la differenza $\Psi'_\mu - q'_\mu$; nell'un modo o nell'altro si trova l'equazione

25. $$\frac{\text{sen}\,p_\mu \cos p_\mu}{k_\mu} - \frac{\text{sen}(p_\mu - \omega_\mu)\cos(p_\mu - \omega_\mu)}{h_\mu} = 0,$$

dalla quale si deduce

$$\text{tang}^2 p_\mu - \frac{2}{\text{sen}\,2\omega_\mu}\left(\frac{h_\mu}{k_\mu} - \cos 2\omega_\mu\right)\text{tang}\,p_\mu - 1 = 0,$$

e quindi

26. $$\tan p_\mu = \frac{1}{\mathrm{sen}2\omega_\mu}\left[\frac{h_\mu}{k_\mu} - \cos 2\omega_\mu \pm \sqrt{\left(\frac{h^2_\mu}{k^2_\mu} - 2\frac{h_\mu}{k_\mu}\cos 2\omega_\mu + 1\right)}\right].$$

Questa equazione contiene le due, che servono a determinare le linee di curvatura. Si dinoti con p_μ l'angolo corrispondente al segno $+$ contenuto nel secondo membro della 26; e si chiamino ordinatamente u_μ, v_μ i raggi di curvatura corrispondenti agli angoli p_μ, $p_\mu + \frac{1}{2}\pi$; la 23 per mezzo della 25 fornisce dopo alcune riduzioni

27. $$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{u_\mu} &= \frac{1}{h_\mu}\left(1 + \tan\omega_\mu \tan p_\mu\right), \\ \frac{1}{v_\mu} &= \frac{1}{h_\mu}\left(1 - \tan\omega_\mu \cot p_\mu\right). \end{aligned}\right.$$

Queste equazioni fanno conoscere i valori de' due raggi di curvatura.

Passiamo alla superficie luogo de' centri de' raggi L°_ν. La 13 può scriversi

28. $$\frac{dL^\circ_\nu}{d\nu}\frac{\nu'}{s'_\nu} = \frac{\cos(p_\nu + \omega_\nu)}{\cos\omega_\nu};$$

quindi la prima 18 diviene dopo le riduzioni

$$\frac{\varphi'_\nu \cos q_\nu}{s'_\nu} = \frac{\tan\omega_\mu}{L^\circ_\mu - L^\circ_\nu}\mathrm{sen}^2 p_\nu - \frac{n^\circ}{L^\circ_\nu \frac{dL^\circ_\nu}{d\nu}}\frac{\cos^2(p_\nu + \omega_\nu)}{\cos^2\omega_\nu}.$$

Si chiamino ordinatamente h_ν, k_ν i raggi delle sfere tangenti la superficie ed aventi un contatto del second'ordine con le linee μ=cost, ν=cost, ovvero con le linee $p_\nu = 0$, $p_\nu = \frac{1}{2}\pi - \omega_\nu$; saranno

$$29. \quad \frac{1}{h_\nu} = -\frac{n^\circ}{L^\circ_\nu \dfrac{dL^\circ_\nu}{d\nu}} \,, \quad \frac{1}{k_\nu} = \frac{\text{tang}\omega_\mu \cos^2\omega_\nu}{L^\circ_\mu - L^\circ_\nu} \,.$$

Per conseguenza l'equazione antecedente si potrà scrivere

$$30. \quad \frac{\varphi'_\nu \cos q_\nu}{s'_\nu} = \frac{1}{\cos^2\omega_\nu}\left(\frac{\text{sen}^2 p_\nu}{k_\nu} + \frac{\cos^2(p_\nu + \omega_\nu)}{h_\nu}\right);$$

e la 19 diventerà

$$31. \quad \frac{q'_\nu - \Psi'_\nu}{s'_\nu} = \frac{1}{\cos^2\omega_\nu}\left(\frac{\text{sen} p_\nu \cos p_\nu}{k_\nu} - \frac{\text{sen}(p_\nu + \omega_\nu)\cos(p_\nu + \omega_\nu)}{h_\nu}\right)$$

In seguito per le linee di curvatura sarà

$$32. \quad \frac{\text{sen} p_\nu \cos p_\nu}{k_\nu} - \frac{\text{sen}(p_\nu + \omega_\nu)\cos(p_\nu + \omega_\nu)}{h_\nu} = 0,$$

e quindi

$$33. \quad \text{tang} p_\nu = \frac{1}{\text{sen} 2\omega_\nu}\left[\cos 2\omega_\nu - \frac{h_\nu}{k_\nu} \pm \sqrt{\left(\frac{h^2_\nu}{k^2_\nu} - 2\frac{h_\nu}{k_\nu}\cos 2\omega_\nu + 1\right)}\right].$$

S'indichi con p_ν l'angolo corrispondente al segno $+$; e si chiamino ordinatamente u_ν, v_ν i raggi di curvatura corrispondenti agli angoli p_ν, $p_\nu + \frac{1}{2}\pi$; si troveranno

$$34. \quad \begin{cases} \dfrac{1}{u_\nu} = \dfrac{1}{h_\nu}\left(1 - \text{tang}\omega_\nu \text{tang} p_\nu\right), \\[2ex] \dfrac{1}{v_\nu} = \dfrac{1}{h_\nu}\left(1 + \text{tang}\omega_\nu \cot p_\nu\right). \end{cases}$$

Le 33, 34 fanno conoscere le linee ed i raggi di curvatura della superficie nella quale esistono i centri de'raggi L°_ν.

Si chiamino S_μ, S_ν le aree di queste due superficie. Si deducono dalle 10, 12 evidentemente

35.
$$\begin{cases} S_\mu=\iiint\left(1-\frac{\lambda_\mu}{L^\circ_\nu}\right)n^\circ.d\lambda_\mu d\nu\,, \\ S_\nu=\iiint\left(1-\frac{\lambda_\nu}{L^\circ_\mu}\right)m^\circ.d\lambda_\nu d\mu, \end{cases}$$

quando si riguardino come variabili indipendenti nel primo caso λ_μ, ν, e nel secondo caso λ_ν, μ; e quindi

36.
$$\begin{cases} S_\mu=\iint\left(1-\frac{L^\circ_\mu}{L^\circ_\nu}\right)n^\circ\,\frac{dL^\circ_\mu}{d\mu}\,d\mu d\nu, \\ S_\nu=\iint\left(1-\frac{L^\circ_\nu}{L^\circ_\mu}\right)m^\circ\,\frac{dL^\circ_\nu}{d\nu}\,d\mu d\nu, \end{cases}$$

quando si riguardino come variabili indipendenti in entrambi i casi μ, ν.

Le equazioni delle due superficie de' centri espresse con le sole coordinate rettangole saranno evidentemente le risultanti della eliminazione delle μ, ν tra le

37. $$x=x^\circ+a_\lambda L^\circ_\mu\,,\quad y=y^\circ+b_\lambda L^\circ_\mu\,,\quad z=z^\circ+c_\lambda L^\circ_\mu\,;$$

ovvero le risultanti della eliminazione delle stesse variabili tra le

38. $$x=x^\circ+a_\lambda L^\circ_\nu\,,\quad y=y^\circ+b_\lambda L^\circ_\nu\,,\quad z=z^\circ+c_\lambda L^\circ_\nu\,;$$

le quali s'ottengono ponendo nelle 1 invece di λ prima L°_μ, poi L°_ν.

5°. Per fare qualche applicazione delle formole antecedenti, considero dapprima brevemente i due casi particolari trattati da Monge [1]; quello cioè nel quale una delle due superficie de' centri sia sferica, e quello nel quale essa sia sviluppabile.

[1] V. *Application de l'Analyse à la Géométrie*, § 23 e 25.

Se la superficie, in cui si trovano i centri de' raggi L°_μ, è sferica di raggio eguale ed r, saranno

$$\frac{1}{h_\mu} = \frac{1}{k_\mu} = \frac{\varphi'_\mu \cos q_\mu}{s'_\mu} = \frac{1}{r} ;$$

perciò la 23 darà

$$\cos^2\omega_\mu = \operatorname{sen}^2 p_\mu + \cos^2(p_\mu - \omega_\mu) ,$$

la quale dovendo sussistere qualunque sia p_μ fornisce, posto $p_\mu = \frac{1}{2}\pi$,

$$\operatorname{sen}^2\omega_\mu = 0 , \qquad \omega_\mu = 0 ;$$

ne segue, osservando le 7 ,

$$\frac{dm^\circ}{d\nu} = 0 ;$$

e potrà porsi $m^\circ=1$. Dunque le linee di curvatura $\nu=$cost. situate nella superficie da determinarsi sono geodetiche; di conseguenza piane , ed i L°_μ saranno i raggi loro osculatori. La prima 6 somministra

$$\frac{dL^\circ_\mu}{d\nu} = 0 ;$$

la quale insegna che le stesse linee sono costanti di forma perchè rimangono inalterati passando dall'una all'altra i raggi loro osculatori; il valore di questi si deduce dalla 21, che diviene

$$L^\circ_\mu \frac{dL^\circ_\mu}{d\mu} + r = 0.$$

S'ottengono i valori delle quantità L°_ν , n° integrando le equazioni

$$rL^\circ_\nu \frac{d\log n^\circ}{d\mu} = L^\circ_\mu - L^\circ_\nu , \;\; L^\circ_\nu(L^\circ_\mu - L^\circ_\nu) \frac{d\log n^\circ}{d\mu} = L^\circ_\mu \frac{dL^\circ_\nu}{d\mu} ;$$

che si desumono facilmente dalla 22 e dalla seconda 6. Se

ora passiamo all'altra superficie de' centri siccome la seconda 29 diventa

$$\frac{1}{k_\nu}=0,$$

così concludiamo che essa è sviluppabile ed ha le caratteristiche inclinate d' un angolo eguale ad $\frac{1}{2}\pi-\omega_\nu$ rispetto all' asse delle λ. I raggi di curvatura di questa superficie saranno espressi, come insegna la 30, da

$$-\frac{n^\circ}{L^\circ_\nu\,\frac{dL^\circ_\nu}{d\nu}\cos^2\omega_\nu}$$

Se la superficie, in cui si trovano i centri de' raggi L°_μ, è sviluppabile la 10 insegna che si n° che L°_ν devono essere indipendenti da λ_μ, quindi da μ; (1) adunque in questo caso

$$\frac{dn^\circ}{d\mu}=0\,,\quad\frac{dL^\circ_\nu}{d\mu}=0\,;$$

la seconda 6 insegna che data l'una di queste equazioni, l'altra consegue. Ora le linee di curvatura $\mu=$ cost. tracciate nella superficie da determinarsi saranno geodetiche, piane e di forma costante; inoltre i raggi di curvatura L°_μ saranno costanti lungo una linea dell'altra curvatura. In seguito, la 32 è soddisfatta sia coll'attribuire a p_ν i due valori $0,\frac{1}{2}\pi$, sia col porre $h_\nu=k_\nu$ Nell'un caso, ritenuto $p_\nu=0$, la prima 34 dà $u_\nu=h_\nu$, e la prima 29 insegna essere u_ν indipendente da μ; perciò la superficie, in cui esistono i centri de' raggi L°_ν, è sottoposta alla stessa definizione della superficie, alla quale appartengono le due de' centri· Nell'altro caso abbiamo come insegna la 30, una superficie sferica, e ricadiamo nel caso antecedente.

(1) V. la Nota.

6. Per fare un'altra applicazione delle formole antecedenti considero la famiglia delle superficie d'area minima. È noto che per queste superficie ha luogo l'equazione

$$L^\circ_\nu = - L^\circ_\mu ;$$

per cui le 6 diventano

$$\frac{d\log L^\circ_\mu}{d\nu} = 2\frac{d\log m^\circ}{d\nu}, \quad \frac{d\log L^\circ_\mu}{d\mu} = 2\frac{d\log n^\circ}{d\mu}.$$

Ne segue

$$\frac{d^2\log m^\circ}{d\mu d\nu} = \frac{d^2\log n^\circ}{d\mu d\nu},$$

da cui

$$\frac{m^\circ}{P_{(\mu)}} = \frac{n^\circ}{Q_{(\nu)}},$$

ove $P_{(\mu)}$, $Q_{(\nu)}$ sono due funzioni arbitrarie delle variabili notate tra parentesi. Si rifletta che le m°, n° sono le derivate di due archi prese l'una rispetto a μ, l'altra rispetto a ν; ora se si riguardano come variabili novelle invece delle μ, ν le $\int P_{(\mu)}\,d\mu$, $\int Q_{(\nu)}\,d\nu$, e si denotano con m°, n° le derivate degli stessi archi prese rispetto a queste l' equazione antecedente si muta in quest'altra più semplice

$$(a) \qquad m^\circ = n^\circ.$$

Ciò torna lo stesso che dire: i parametri μ, ν, che fino ad ora erano indeterminati, s'intenderanno tali per cui abbia luogo l'equazione (a). Quest'equazione insegna che ogni superficie appartenente alla famiglia d' area minima può essere divisa in rettangoli infinitesimi simili tra di loro. In seguito si trovano, indicando con C una costante arbitraria,

$$L^\circ_\mu = \frac{m^{\circ 2}}{C^2}, \quad L^\circ_\nu = -\frac{m^{\circ 2}}{C^2};$$

ora si possono sostituire le variabili μ, ν alle C_μ, C_ν, nel quale caso l'equazione (a) si verifica tuttora; quindi porremo

$$(b) \qquad L^\circ_\mu = m^{\circ 2}, \quad L^\circ_\nu = -m^{\circ 2}.$$

Mediante questi valori le 7 diventano

$$(c) \qquad \operatorname{tang}\omega_\mu = -\frac{dm^\circ}{d\nu}, \quad \operatorname{tang}\omega_\nu = -\frac{dm^\circ}{d\mu}.$$

Si osservi che m° non è funzione al tutto arbitraria, ma deve soddisfare ad una equazione alle derivate parziali del second'ordine; difatto, chiamando s l'arco d'una linea qualunque situata in una superficie della famiglia d'area minima, sarà

$$s'^2 = m^{\circ 2}(\mu'^2 + \nu'^2),$$

ed applicando a questo valore di s'^2 la formola di Gauss si troverà

$$\frac{1}{L^\circ_\mu L^\circ_\nu} = -\frac{1}{m^{\circ 2}}\left(\frac{d^2 \log m^\circ}{d\mu} + \frac{d^2 \log m^\circ}{d\nu}\right),$$

ovvero sostituendo e riducendo

$$(d) \qquad m^\circ\left(\frac{d^2 m^\circ}{d\mu} + \frac{d^2 m^\circ}{d\nu}\right) = 1 + \left(\frac{dm^\circ}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{dm^\circ}{d\nu}\right)^2.$$

Ora, per la superficie in cui sono gli estremi de' raggi L°_μ, la derivata dell'arco d'una linea qualsivoglia ha per valore

$$s_\mu'^2 = 4m^{\circ 2}(m^{\circ\prime 2} + \nu'^2);$$

e l'area è data da

$$S_\mu = 4\iint m^{\circ 2}\frac{dm^\circ}{d\mu}.\,d\mu d\nu,$$

della quale espressione si trova immediatamente un integrale primo. Quanto all'incurvamento, si hanno dapprima

$$\frac{1}{h_\mu} = \frac{1}{2m^{\circ 2}\operatorname{tang}\omega_\nu}, \quad \frac{1}{k_\mu} = \frac{\operatorname{tang}\omega_\nu \cos^2\omega_\mu}{2m^{\circ 2}};$$

in seguito la direzione delle linee di curvatura è data da

$$\tang p_\mu = \tfrac{1}{2}\cot\omega_\mu[\tang^2\omega_\mu + \tang^2\omega_\nu - 1$$
$$\pm \sqrt{[(\tang^2\omega_\mu + \tang^2\omega_\nu + 1)^2 - 4\tang^2\omega_\nu)]}\ ;$$

ed i raggi di curvatura sono somministrati da

$$\frac{4m^{\circ 2}\tang\omega_\nu}{u_\mu} = \tang^2\omega_\mu + \tang^2\omega_\nu$$
$$+ 1 + \sqrt{[(\tang^2\omega_\mu + \tang^2\omega_\nu + 1)^2 - 4\tang^2\omega_\mu]}\ ,$$
$$\frac{4m^{\circ 2}\tang\omega_\nu}{v_\mu} = \tang^2\omega_\mu + \tang^2\omega_\nu$$
$$+ 1 - \sqrt{[(\tang^2\omega_\mu + \tang^2\omega_\nu + 1)^2 - 4\tang^2\omega_\nu]}\ ;$$

le quali espressioni insegnano che la superficie de' centri ha i raggi di curvatura diretti nello stesso senso. Si conclude dalle medesime

$$\sqrt{(u_\mu v_\mu)} = 2\sqrt{(-\, L^\circ_\mu L^\circ_\nu)}\ ;$$

la quale equazione insegna che il raggio di media curvatura della superficie de' centri è doppio di quello della superficie d'area minima. Quanto alla direzione del piano tangente, le (3), (4) somministrano

$$\frac{da_\mu}{d\nu} = a_\nu\frac{d\log m^\circ}{d\mu}\ ,\ \frac{db_\mu}{d\nu} = b_\nu\frac{d\log m^\circ}{d\mu}\ ,\ \frac{dc_\mu}{d\nu} = c_\nu\frac{d\log m^\circ}{d\mu}$$
$$\frac{da_\mu}{d\nu} = a_\mu\frac{d\log m^\circ}{d\nu}\ ,\ \frac{db_\nu}{d\mu} = b_\mu\frac{d\log m^\circ}{d\nu}\ ,\ \frac{dc_\nu}{d\mu} = c_\mu\frac{d\log m^\circ}{d\nu}\ ;$$

individuata la m°, funzione delle μ, ν, queste equazioni faranno conoscere mediante l'integrazione i valori delle a_μ, b_μ, c_μ, coseni degli angoli formati dalla normale alla superficie de'centri cò tre assi rettilinei.

In modo analogo si può determinare tutto ciò che concerne la quadratura, l'incurvamento e la direzione della superficie in cui si trovano gli estremi de' raggi L°_ν.

7. Per fare un'ultima applicazione, considero le tre note famiglie di superficie ortogonali del second'ordine espresse con le equazioni

$$\frac{x^2}{\rho}+\frac{y^2}{\rho-D^2}+\frac{z^2}{\rho-E^2}=1\ ,\ \frac{x^2}{\mu}+\frac{y^2}{\mu-D^2}-\frac{z^2}{E^2-\mu}=1,$$

$$\frac{x^2}{\nu}-\frac{y^2}{D^2-\nu}-\frac{z^2}{E^2-\nu}=1\ ;$$

ove ρ, μ, ν sono ordinatamente i tre parametri della famiglia d'ellissoidi, d'iperboloidi ad una falda e d'iperboloidi a due falde; quindi abbiamo sempre

$$D^2 < E^2 < \rho\ ,\quad D^2 < \mu < E^2\ ,\quad 0 < \nu < D^2.$$

Si deducono da queste equazioni, com'è noto,

$$(a)\ \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{(\rho\mu\nu)}}{DE},\ y=\dfrac{\sqrt{(\rho-D^2)}\sqrt{(\mu-D^2)}\sqrt{(D^2-\nu)}}{\sqrt{(E^2-D^2)}}, \\ z=\dfrac{\sqrt{(\rho-E^2)}\sqrt{(E^2-\mu)}\sqrt{(E^2-\nu)}}{E\sqrt{(E^2-D^2)}}. \end{cases}$$

Perciò le (1), avvertendo che quì s'è posto ρ invece di λ, danno mediante le relazioni tra coseni

$$(b)\ \begin{cases} l=\dfrac{\sqrt{(\rho-\mu)}\sqrt{(\rho-\nu)}}{t_\rho},\quad m=\dfrac{\sqrt{(\mu-\nu)}\sqrt{(\rho-\mu)}}{t_\mu} \\ n=\dfrac{\sqrt{(\mu-\nu)}\sqrt{(\rho-\nu)}}{t_\nu}; \end{cases}$$

ove

$$t_\rho=2\sqrt{\rho}\sqrt{(\rho-D^2)}\sqrt{(\rho-E^2)},\ t_\mu=2\sqrt{\mu}\sqrt{(\mu-D^2)}\sqrt{(E^2-\mu)},$$

$$t_\nu=2\sqrt{\nu}\sqrt{(D^2-\nu)}\sqrt{(E^2-\nu)}.$$

Le stesse (1) forniscono i coseni degli angoli, che la normale all'ellissoide qualunque $\rho=$ cost. fa co'tre assi rettilinei, espressi come segue

$$(c)\begin{cases} a_\lambda = \dfrac{1}{2l}\dfrac{\sqrt{(\mu\nu)}}{\mathrm{DE}}\dfrac{1}{\sqrt{\rho}}, \\ b_\lambda = \dfrac{1}{2l}\dfrac{\sqrt{(\mu-\mathrm{D}^2)}\sqrt{(\mathrm{D}^2-\nu)}}{\mathrm{D}\sqrt{(\mathrm{E}^2-\mathrm{D}^2)}}\dfrac{1}{\sqrt{(\rho-\mathrm{D}^2)}}, \\ c_\lambda = \dfrac{1}{2l}\dfrac{\sqrt{(\mathrm{E}^2-\mu)}\sqrt{(\mathrm{E}^2-\nu)}}{\mathrm{E}\sqrt{(\mathrm{E}^2-\mathrm{D}^2)}}\dfrac{1}{\sqrt{(\rho-\mathrm{E}^2)}} \end{cases}$$

Infine dalle (7) si deducono i valori de' due raggi di curvatura L°_μ, L°_ν relativi ad un punto qualsivoglia dello stesso ellissoide, i quali sono

$$(d)\qquad L^\circ_\mu = -\,2l(\rho-\mu)\,,\quad L^\circ_\nu = -\,2l(\rho-\nu).$$

Ora, si chiamino x_μ, y_μ, z_μ le coordinate rettangole della superficie, in cui si trovano gli estremi de' raggi L°_μ; x_ν, y_ν, z_ν quelle della superficie in cui esistono gli estremi de' raggi L°_ν. Le equazioni di queste due superficie in termini finiti si deducono dalle 37,38, scrivendo invece delle quantità x°, y°, z°, a_λ, b_λ, c_λ, L°_μ, L°_ν i valori somministrati dalle (a), (b), (c), (d); s'ottengono in tal modo, fatte le riduzioni,

$$x_\mu = \frac{\sqrt{(\mu\nu)}}{\mathrm{DE}}\frac{\mu}{\sqrt{\rho}},\quad y_\mu = \frac{\sqrt{(\mu-\mathrm{D}^2)}\sqrt{(\mathrm{D}^2-\nu)}}{\mathrm{D}\sqrt{(\mathrm{E}^2-\mathrm{D}^2)}}\frac{\mu-\mathrm{D}^2}{\sqrt{(\rho-\mathrm{D}^2)}},$$

$$z_\mu = -\frac{\sqrt{(\mathrm{E}^2-\mu)}\sqrt{(\mathrm{E}^2-\nu)}}{\mathrm{E}\sqrt{(\mathrm{E}^2-\mathrm{D}^2)}}\frac{\mathrm{E}^2-\mu}{\sqrt{(\rho-\mathrm{E}^2)}},$$

$$x_\nu = \frac{\sqrt{(\mu\nu)}}{\mathrm{DE}}\frac{\nu}{\sqrt{\rho}},\quad y_\nu = -\frac{\sqrt{(\mu-\mathrm{D}^2)}\sqrt{(\mathrm{D}^2-\nu)}}{\mathrm{D}\sqrt{(\mathrm{E}^2-\mathrm{D}^2)}}\frac{\mathrm{D}^2-\nu}{\sqrt{(\rho-\mathrm{D}^2)}},$$

$$z_\nu = -\frac{\sqrt{(\mathrm{E}^2-\mu)}\sqrt{(\mathrm{E}^2-\nu)}}{\mathrm{E}\sqrt{(\mathrm{E}^2-\mathrm{D}^2)}}\frac{\mathrm{E}^2-\nu}{\sqrt{(\rho-\mathrm{E}^2)}}.$$

Da queste equazioni si traggono le proporzioni seguenti

$$x^{\circ} : x_{\mu} : x_{\nu} = \rho : \mu : \nu$$

$$y^{\circ} : y_{\mu} : y_{\nu} = \rho - D^2 : \mu - D^2 : -(D^2 - \nu)$$

$$z^{\circ} : z_{\mu} : z_{\nu} = \rho - E^2 : -(E^2 - \mu) : -(E^2 - \nu) ;$$

chiamando gl'iperboloidi di parametri μ, ν *omonimi* rispettivamente alle due superficie luoghi de'centri de'raggi $L^{\circ}_{\mu}, L^{\circ}_{\nu}$, abbiamo la proprietà che le coordinate rettangole dell'ellissoide e delle due superficie de' centri, nel senso di ciascun asse, sono proporzionali a'quadrati de' semiassi dell'ellissoide e degli iperboloidi omonimi alle medesime superficie dei centri.

La determinazione di tutto ciò che risguarda la direzione e l'incurvamento di questi due luoghi de' centri non presenta difficoltà veruna, eccettuata la lunghezza de' calcoli.

Pavia 1857.

INTORNO AD UNA LINEA SITUATA IN UNA SUPERFICIE SVILUPPABILE.

NOTA

DEL PROF. DELFINO CODAZZI.

Siano x, y, z ed s le coordinate rettangole e l'arco d'una linea, la quale incontri sotto angoli retti le caratteristiche d'una superficie sviluppabile; X, Y, Z, le coordinate rettangole d'un punto qualunque della caratteristica passante per l'estremo dell'arco s; a, b, c i coseni degli angoli, che questa fa co'tre assi coordinati; λ la parte della medesima compresa tra la linea ortogonale ed il punto qualunque. Le quantità x, y, z, s, a, b, c saranno funzioni d'una stessa variabile; sia questa la s. Avremo

$$X = x + a\lambda , \quad Y = y + b\lambda , \quad Z = z + c\lambda ;$$

inoltre

$$a \frac{dx}{ds} + b \frac{dy}{ds} + c \frac{dz}{ds} = 0.$$

Si denomini S l'arco d'una linea qualsivoglia situata nella superficie, e s'indichino con apici le derivate totali prese rispetto ad una variabile qualunque; sarà

$$S'^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2 ;$$

ovvero

$$S'^2 = \lambda'^2 + \Big\{ 1 + 2\lambda \left(\frac{dx}{ds} \frac{da}{ds} + \frac{dy}{ds} \frac{db}{ds} + \frac{dz}{ds} \frac{dc}{ds} \right)$$

$$+ \lambda^2 \left[\left(\frac{da}{ds} \right)^2 + \left(\frac{db}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dc}{ds} \right)^2 \right] \Big\} s'^2 .$$

Evidentemente, per un punto qualunque dello spigolo di regresso della superficie sviluppabile varieranno x, y, z, a, b, c senza che variino X, Y, Z, λ; perciò, denominando λ^o la funzione di s valore di λ relativo ad esso spigolo di regresso, si avranno

$$\frac{dx}{ds} + \frac{da}{ds} \lambda^o = 0 , \quad \frac{dy}{ds} + \frac{db}{ds} \lambda^o = 0 , \quad \frac{dz}{ds} + \frac{dc}{ds} \lambda^o = 0 ;$$

da cui si traggono

$$\left(\frac{da}{ds} \right)^2 + \left(\frac{db}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dc}{ds} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^{o2}} ,$$

$$\frac{dx}{ds} \frac{da}{ds} + \frac{dy}{ds} \frac{db}{ds} + \frac{dz}{ds} \frac{dc}{ds} = - \frac{1}{\lambda^o} .$$

Sostituendo questi valori nell'espressione antecedente di S'^2 e riducendo, si troverà

$$S'^2 = \lambda'^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^o} \right)^2 s'^2 ;$$

la quale è l'equazione generale della derivata d'un arco situato in una superficie sviluppabile ed espresso con le coor-

dinate curvilinee λ, s. È chiaro che l'equazione rimane inalterata, quando la superficie subisce una deformazione; allora le coordinate λ cesseranno d'essere caratteristiche ma resteranno geodetiche.

Reciprocamente, l'equazione

$$S'^2 = \lambda'^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^o}\right)^2 s'^2 ,$$

ove λ^o è funzione di s soltanto, è speciale per una linea esistente in una superficie sviluppabile. Difatto l'unità divisa pel prodotto de' raggi di curvatura della superficie relativi al punto di coordinate curvilinee λ, s ha per valore, applicando la formola di Gauss

$$-\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda^o}} \frac{d^2\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^o}\right)}{d^2\lambda} ,$$

la quale quantità è manifestamente zero.

Pavia, 1857.

SUR L'INDUCTION ÉLECTROSTATIQUE

NOTE

PAR M. A. DE LA RIVE

J'ai eu le plaisir, pendant mon séjour à Rome, de voir toutes les expériences dont M. Volpicelli parle dans son mémoire (1), et que ce savant distingué a bien voulu me montrer. J'ai pu constater la parfaite exactitude de tous les faits décrits, ainsi que le mode d'expérimentation aussi ingénieux que délicat du physicien italien. Les conclusions que M. Volpicelli tire de toutes ces expériences semblent incontestables; cependant le principe qu'il établit de l'existence d'une électricité dissimulée, a été combattu déjà précédemment par divers savants lorsqu'il a été mis en avant par quelques physiciens et dernièrement par Melloni; M. Riess, en particulier, a cherché à démontrer soit théoriquement, soit expérimentalement à l'occasion du condensateur, que ce principe ne peut être admis; il est vrai qu'il ne connaissait pas alors les derniers travaux de M. Volpicelli. Je dois avouer que ces recherches, et en particulier les experiences avec le plan d'épreuve, on fait sur mon esprit une grande impression; mais il faut reconnaître que le sujet dont il s'agit doit être examiné de très-près et d'une manière approfondie avant qu'on puisse émettre une opinion bien prononcée; c'est cet examen que j'espère faire plus tard à tête reposée; aussi, pour le moment, je me borne à rendre justice à l'exactitude et à l'ingénieuse manière d'opérer de M. Volpicelli.

Rome, le 14 avril 1857.

(1) V. Bibliothèque universelle di Genève, archives des sciences phy. et nat. T. XXXV, mai 1857, pag. 30 - Comptes Rendus, T. XLIV, séance du 4 mai 1857, pag. 917.

FORMULE GENERALI PEL MANOMETRO AD ARIA COMPRESSA, E PER LO STEREOMETRO.

NOTA

DEL PROF. P. VOLPICELLI.

Fra le molte applicazioni della legge di Boyle e Mariotte, si annovera il *manometro* ad aria compressa, e lo *stereometro*. In questa nota daremo alcune formule più generali di quelle già conosciute, relative agl'indicati due stumenti: tralasceremo poi le figure che ai medesimi si riferiscono, perchè abbastanza cognite, molto facili ad immaginare, oltre ad essere nei primari corsi di fisica riportate. Chiameremo gas premuto quello che, sempre chiuso fra il vertice del tubo manometrico ed il mercurio, cangia continuamente volume; e gas premente l'altro che tali effetti produce colla sua pressione. Dicasi :

n il coefficiente, pel quale deve moltiplicarsi la pressione atmosferica media $0,^{m}76$, per misurare l'azione qualunque, o forza elastica, esercitata da un gas o vapore, contro l'aria chiusa nel manometro.

a la differenza fra i due livelli, corrispondenti all'equilibrio iniziale.

l la distanza fra il livello a contatto del gas premuto, ed il vertice del manometro, nel caso della pressione iniziale.

λ la distanza fra il livello del mercurio in contatto del gas premente, ed il vertice del manometro.

p la reazione iniziale del gas premuto, cui corrisponde nel gas premente un azione o pressione, che pure chiameremo iniziale, cioè da cui parte il ragionamento.

l' la distanza fra il livello in contatto del gas premuto, ed il vertice indicato.

p' la reazione, o forza elastica corrispondente nel gas premuto.

y la distanza fra i due livelli, a contatto ambedue del gas premuto, ma corrispondenti uno alla reazione iniziale p, l'altro alla reazione qualunque p' del gas medesimo.

z la distanza fra i due livelli, a contatto ambedue del gas premente, ma corrispondenti uno all'azione iniziale, l'altro all'azione qualunque del gas medesimo.

R, r sieno i due raggi dei livelli circolari del mercurio, uno in contatto del gas premente, l'altro del gas premuto.

Ciò premesso, egli è chiaro che, ritenendo $0,^{m}76$ per altezza normale del barometro, avremo il seguente sistema di equazioni.

$$(1)\quad \begin{cases} n.0^{m},76 = p' + a \pm (y+z), \quad \pi r^2 y = \pi R^2 z, \\ l' = l \mp y, \quad p' = \frac{pl}{l'} \quad \lambda - l' = a \pm (y+z); \end{cases}$$

nelle quali valeranno i segni superiori od inferiori, secondo che nel tubo chiuso del manometro, il mercurio debba salire o scendere, per passare dall'equilibrio iniziale, a quello dovuto alla pressione $n.0,^{m}76$. Mediante le (1) arriveremo alla

$$y^2 \mp \frac{H}{R^2+r^2} y + \frac{lR^2K}{R^2+r^2} = 0 ,$$

in cui per compendio si è fatto

$$H = (n.0,76 - a)R^2 + l(R^2 + r^2) , \quad K = n.0,76 - p - a ;$$

e perciò sarà

$$(2)\qquad y = \frac{\pm H \mp \sqrt{[H^2 - 4(R^2 + r^2)lR^2K]}}{2(R^2 + r^2)} .$$

In questa formula valeranno i segni superiori od inferiori, secondo che il moto per passare dall'equlibrio iniziale all'attuale, sarà o ascendente, o discendente nel ramo chiuso del manometro; giacchè in ambo i casi posto

$$p = n.0,76 , \quad \text{e perciò} \quad a = 0 ,$$

deve ottenersi da essa, come realmente si ottiene, $y = 0$.

La formula stessa è generalissima, risponde colle precedenti a qualunque possibile ricerca sul manometro ad aria compressa, e colla terza delle (1) serve alla graduazione teoretica del tubo chiuso, nel quale deve comprimersi l'aria. Dalla medesima (2) si ottengono come corollari le altre formule meno generali, ma più pratiche, relative all' indicato stromento, come ora vedremo. Perciò sarà utile che la stessa (2) venga introdotta nei corsi di fisica.

Dando successivamente ad n i valori 1, 2, 3, ..., quei corrispondenti della y, ottenuti dalla (2), e della z ottenuti dalla seconda delle (1), posti nel trinomio $a \pm y \pm z$, daranno le altezze corrispondenti del mercurio, nel ramo chiuso dal manometro, contate dal livello corrispondente alle pressioni rispettive di 1, 2, 3,... atmosfere. La somma poi $a \pm y$ darà le altezze del mercurio, contate sempre dal livello iniziale, per le pressioni di 1, 2, 3,... atmosfere.

Quindi risulta, che potrà, in un modo o in un altro, facilmente ottenersi, e con ogni esattezza, la graduazione teoretica del manometro; purchè l' aria chiusa nel medesimo siasi bene purgata dalla umidità, e corretta dagli effetti della temperatura. Le formule precedenti possono servire a tante ricerche manometriche, quante sono le quantità contenute in esse.

Posto $p = 0{,}76$, dalla (2) avremo

$$(3) \qquad y = \frac{\pm H \mp \sqrt{[H^2 - 4(R^2 + r^2) l R^2 K']}}{2(R^2 + r^2)},$$

essendosi fatto per compendio

$$K' = (n - 1)\, 0{,}76 - a \; ;$$

e perciò la (3) si riferisce al caso, in cui alla pressione iniziale corrisponde la barometrica normale.

Posto nella (3) $a = 0$, avremo la

$$(4) \qquad y = \frac{\pm H' \mp \sqrt{[H'^2 - 4(R^2 + r^2) l R^2 K'']}}{2(R^2 + r^2)},$$

essendo

$$H' = n.\,0,76\,R^2 + l(R^2 + r^2)\ ,\quad K'' = (n-1).\,0,76\ .$$

Ciò equivale a supporre, che alla pressione iniziale precedente, i due livelli coincidano; perciò la (4) valerà per questo caso.

Nella (4) suppongasi R grande tanto, da potersi r trascurare; avremo

$$(5)\quad y = \frac{\pm(n.\,0,76 + l) \mp \sqrt{[(n.0,76 - l)^2 + 4.l.0,76]}}{2}\ .$$

Questa supposizione corrisponde a ritenere inoltre, che il livello in contatto col gas premente sia sensibilmente fisso; perciò la stessa (5) valerà in tal caso.

Nella (4) poniamo $R = r$, avremo la

$$(6)\quad y = \frac{\pm(n.0,38 + l) \mp \sqrt{\{l^2 + 0,38[0,38n^2 - 2l(n-2)]\}}}{2}\ .$$

Ciò corrisponde a supporre, che di più il manometro sia foggiato a sifone, avente per tutto lo stesso calibro; dunque la (6) giustamente corrisponde a questo caso.

Volendo poi mediante la (6) determinare il valore di l', cioè la distanza fra il vertice del tubo, ed il livello a contatto del gas premuto, facilmente vedremo, che pel caso medesimo dalla prima, dalla penultima, e dell' ultima delle (1) abbiamo:

$$n.\,0,76 = p' \pm (y+z)\ ,\quad p' = \frac{0,76.l}{l'}\quad \lambda - l' = \pm(y+z),$$

donde

$$l'^2 + (n.\,0,76 - \lambda)\,l' - 0,76.\,l = 0\ ;$$

ed in ambo i casi

$$(7)\qquad l' = \frac{\lambda - n.0,76 + \sqrt{[(\lambda - n.0,76)^2 + 4.0,76l]}}{2}\ ,$$

nella quale si è ritenuto il segno + innanzi al radicale,

perchè quando $\lambda = l$, ed $n = 1$, deve trovarsi $l' = l$, come realmente si trova nella (7).

Si possono eseguire *a priori* le divisioni, su quella parte del tubo di calibro costante, nella quale si contiene il gas premuto, ed a contare dalla coincidenza dei due livelli, cui corrisponde la pressione iniziale, e normale $0^m,76$. A questo fine presa la distanza $l(= \text{A E})$, si guidino per gli estremi A ed E di essa due parallelle, una superiore l'altra inferiore; poi dall' estremo superiore A, corrispondente al vertice del tubo, si prenda sulla parallela superiore una distanza qualunque A T, quindi partendo dall'estremo inferiore E, si ripeta questa distanza n volte sulla parallela inferiore, la quale perciò sarà divisa in n parti uguali fra loro. Quindi se dal punto T si guidino tante rette alle divisioni praticate sulla parallela inferiore, le rette medesime divideranno l in altrettante parti, delle quali una qualunque AX, sarà espressa da

$$(8) \qquad AX = \frac{l}{n+1};$$

e ponendo successivamente $n = 1, 2, 3, \ldots$, otterremo le divisioni

$$\frac{l}{2}, \frac{l}{3}, \frac{l}{4}, \ldots$$

Siccome poi, per la legge di Mariotte, i volumi nei quali si restringe un gas, di massa e temperatura costante, per le pressioni esercitate sul medesimo, sono in ragione inversa di queste; così chiaro apparisce che l'aria contenuta nel cilindro di altezza $l\ (= \text{A E})$, e di raggio costante, successivamente restringendosi nelle divisioni, praticate sull' altezza medesima, subirà in corrispondenza una pressione doppia, tripla, quadrupla, ecc. di quella che prèmeva la stess'aria, mentre occupava l'intero cilindro di altezza l. Ciò significa che la divisione ora indicata, potrà ottimamente servire alle misure manometriche.

Dividendo un membro e l'altro della (5) per l, avremo

$$(9)\ \frac{y}{l}=\frac{\pm\left(\frac{n.0,76}{l}+1\right)\mp\sqrt{\left[\left(\frac{n.0,76}{l}-1\right)^2+\frac{4.0,76}{l}\right]}}{2},$$

nella quale, facendo $n=1, 2, 3 \ldots\ldots$, i valori del rapporto $\frac{y}{l}$ indicheranno le altezze, cui dovrà sulla scala scriversi 1 atmos., 2 atmos., ecc.; giacchè in questo caso y rappresenta la lunghezza della colonna di mercurio, ed l quella di tutto il tubo, a contare sempre dalla coincidenza dei livelli.

Dalla (6), prendendo i segni inferiori, otterremo la

$$(10)\ \left\{\begin{array}{l} y=\frac{-(l+n.0,38)+\sqrt{[(l-n.0,38)^2+4.l.0,38]}}{2}, \\ \text{quindi, per } n=0, \text{ sarà} \\ y=-\frac{l}{2}\left[1-\sqrt{\left(1+\frac{4.0,38}{l}\right)}\right]. \end{array}\right.$$

Queste formule fanno conoscere, quale lunghezza debbano avere i due rami del manometro, al disotto della coincidenza dei livelli, affinchè l'aria chiusa nel medesimo non possa escire, comunque diminuisca la pressione, che potrebbe pure divenir nulla.

I manometri tanto ad aria libera, quanto ad aria compressa, possono ambedue graduarsi, o praticamente, o teoricamente: noi ci occuperemo soltanto della graduazione teoretica; però facendo riflettere non essere cosa facile procurarsi con ogni esattezza gli elementi per questa graduazione; cosicchè in generale riesce più sicuro graduare siffatti stromenti per via di sperienza. In fatti nei manometri ad aria compressa, dei quali solo intendiamo parlare, la graduazione pratica offre i seguenti vantaggi sulla teoretica; cioè: 1° permette l'impiego di tubi più lunghi, e perciò più sen-

sibili; 2° non esige che i medesimi sieno cilindrici; 3° essi possono foggiarsi conici più o meno, e ristretti verso la sommità chiusa, onde la graduazione sia più marcata per le alte pressioni.

I manometri ad aria compressa vengono foggiati altri a tubo retto, altri a due rami, od a sifone. Quelli a tubo retto hanno l'inconveniente, che quando sieno applicati ad una caldaia a vapore, se il rubinetto, per dimenticanza, si lasci aperto dopo cessato il fuoco, accade pel raffreddamento che il vuoto formasi al di sopra dell' acqua della caldaia. Perciò l' aria del manometro, pel suo eccesso di elasticità esce dal tubo, e le divisioni della scala non hanno più il giusto loro valore. Il manometro a sifone, quando abbia dimensioni e forme convenienti, non va soggetto all' indicato perturbamento.

Nelle caldaie ad alta pressione, s'impiegano sovente i manometri ad aria compressa, i quali comunicano col vapore della caldaia mediante un tubo metallico. Ma siffatti stromenti, dopo qualche tempo forniscono indicazioni erronee; perchè il mercurio riscaldato, si combina in parte coll'ossigeno dell'aria compressa nel manometro. Inoltre l'ossido mercurioso, formato a questo modo, si deposita sul tubo, ed impedisce di scorgere il livello del mercurio. Viene perfettamente rimediato a questi due difetti, sostituendo il nitrogeno all'aria contenuta nell'istromento. Ma potrebbe anche succedere, che diminuendo rapidamente la pressione, una parte del gas escisse dal tubo, ed anche in questo caso la sua graduazione diverrebbe inesatta. Finalmente le indicazioni del manometro ad aria compressa, vengono affette dalla temperatura, la quale accrescendo la tensione od elasticità dell' aria chiusa, fa variare le indicazioni stesse fra limiti assai distanti fra loro, in vicinanza della caldaia, ed indipendentemente dalla tensione sviluppata dal vapore nella medesima. Da tutto ciò risulta, che per le caldaie a vapore sono da preferire i manometri ad aria libera, nei quali non avrà

luogo altra correzione, da quella in fuori che riferisce alla dilatazione del mercurio, e che facile riesce a praticarsi.

Per passare all'applicazione seconda, osserviamo che il sig. Say nel 1797, a determinare il volume apparente di un corpo, inventò un istromento, cui diede il nome di *Stereometro*. Tralasciamo la minuta descrizione del medesimo, e per amore di brevità, e perchè facilmente può da quanto siegue dedursi; ma svilupperemo invece maggiormente la teorica, dando alcune generali formule non ancora pubblicate.

Abbiansi due cilindri uno maggiore dell'altro, ed insieme uniti, cosicchè facciano tutto un tubo; il minore, che non dovrà essere capillare, sia sottoposto all'altro, ed abbia due scale, una in parti di egual capacità w; l'altra in parti di eguale lunghezza: queste coincideranno insieme, se il cilindro sia perfettamente calibrato. Nel cilindro maggiore si colloca quel corpo, di cui si vuole determinare il volume x. Il tubo, aperto in ambo gli estremi suoi, facciasi, pel cilindro minore, immergere verticalmente nel mercurio, contenuto in un recipiente cilindrico, abbastanza profondo; in guisa che i due livelli del mercurio, l'uno interno l'altro esterno al tubo stesso, corrispondano allo zero delle indicate due scale. In tale stato si chiuda l'estremo superiore del cilindro maggiore, per mezzo di una lastra di vetro smerigliata, e spalmata di sevo. L'aria contenuta nel volume v, compreso fra il livello del mercurio e la detta chiusura, sarà premuta dalla pressione attuale atmosferica p, ed occuperà il volume $v-x$. Sollevando poscia il tubo ad arbitrio, senza punto variare la sua temperatura, salirà il mercurio nel cilindro minore, all'altezza d, contata dal primitivo livello; ed il volume occupato dall'aria in questo nuovo stato, sarà cresciuto di $n\,w$, e sopporterà una pressione rappresentata da $p-d$. Quindi, per la legge di Mariotte, avremo

$$p : p-d = v-x+n\,w : v-x,$$

donde

$$(a_1) \qquad x = v + \frac{(d-p)nw}{d}.$$

In questa formula le quantità d, n, p generalmente variano per ogni caso, e si ottengono dalla osservazione. La quantità p si ottiene direttamente dal barometro; però possiamo anche ottenerla senza valerci di questo istromento, e ciò sollevando il tubo due volte, ma sempre di una quantità diversa. In fatti, per questi due sollevamenti, dalla (a_1) abbiamo la

$$x\,d' = d'\,(v + n'w) - p\,n'\,w,$$

$$x\,d'' = d''\,(v + n''w) - p\,n''w,$$

dalle quali si ottiene

$$(a_2) \qquad p = \frac{(n''-n')d'd''}{n''d'-n'd''},$$

valore da sostituire, se vogliasi, nella (a_1).

In quanto poi alle quantità v, w, essendo queste costanti, si debbono determinare per ogni caso. A questo fine si facciano due simili sperienze, mettendo nel cilindro maggiore un corpo di volume cognito, e diverso in ognuna delle medesime. Rappresentino x_1, x_2 i volumi diversi e cogniti di questi corpi; avremo dalla (a_1)

$$d_1x_1 = d_1\,(v + n_1w) - p_1n_1w,$$

$$d_2x_2 = d_2\,(v + n_2w) - p_2n_2\,w;$$

e mediante la eliminazione sarà

$$(a_3) \qquad \begin{cases} v = \dfrac{(p_2+d_2)n_2d_1x_1-(p_1-d_1)n_1d_2x_2}{(n_1-n_2)d_1d_2+p_2n_2d_1-p_1n_1d_2}, \\[2ex] w = \dfrac{(x_1-x_2)d_1d_2}{(n_1-n_2)d_1d_2+p_2n_2d_1-p_1n_1d_2}. \end{cases}$$

Ottenuti numerici questi valori, che potrebbero mediante qualche pratica modificazione divenire più semplici, e sostituiti nella (a_1), la ridurranno colle sole quantità d, n, p; ovvero, se vogliasi, mediante il valor numerico della (a_2), colle sole quantità d, n. Preparata in tal guisa la (a_1), potrà colla medesima ottenersi facilmente il cercato volume x.

Ora cade in acconcio l'osservare, che la gravità specifica essendo il peso della unità di volume, la (a_1) sarà molto utile, per determinare quella di que' corpi, come la polvere da guerra, le sostanze filamentose, la fecola, il legno, eccetera, nei quali la densità cangia, od a causa della compressione, o dell'inzuppamento, in essi prodotto dal liquido, nel quale debbono immergersi, per determinare idrostaticamente il volume loro.

APPLICAZIONE DELLA TEORICA DEI DETERMINANTI.

NOTA

DI R. RUBINI.

La teorica de' determinanti si è, ormai, renduta talmente importante, per la sua maniera concisa, con la quale si raggiungono numerosi e difficili risultamenti, che egli è affatto impossibile poterla più trasandare in un corso ordinario di Algebra. Ed ei conviene professarsi immensamente obbligati all'illustre prof. *Brioschi*, che primo affatto in Italia, e un de' primi in Europa, abbia si maestrevolmente esposti i principali e più importanti teoremi di si classica teorica, in guisa da potersene avvalere come complemento al corso algebrico; il quale per virtù de' determinanti cangerà certo di forma più che non gli avvenne con l'uso delle funzioni. Nella presente nota, pertanto, ci proponiamo mostrare con qualche esempio, come l'algoritmo de' determinanti possa valere nella esposizione della teorica delle equazioni, e come facilmente conduca a talune formole, che sarebbe assai malagevole altrimenti dedurre, senza però aver nulla a pretendere sulla novità dell'argomento.

1. Sia dato il determinante

$$(1)\quad P = \begin{vmatrix} a_{1,1} + h_{1,1} & a_{1,2} + h_{1,2} & \ldots & a_{1,n} + h_{1,n} \\ a_{2,1} + h_{2,1} & a_{2,2} + h_{2,2} & \ldots & a_{2,n} + k_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} + h_{n,1} & a_{n,2} + h_{n,2} & \ldots & a_{n,n} + h_{n,n} \end{vmatrix}$$

e svolgendolo in determinante ad elementi semplici secondo

la nota regola [1], avremo :

$$(2)\qquad P = M + \Sigma M_1 + \Sigma M_2 + \ldots + \Sigma M_{n-1} + \Sigma M_n$$

essendo

$$(3)\qquad M = \begin{vmatrix} a_{1,1} a_{1,2} & . & . & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} a_{2,2} & . & . & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} a_{n,2} & . & . & . & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

e rappresentando, in generale ΣM_i una somma de' determinanti, ciascuno de' quali si ricava dal precedente M, *col mutare in questo* i *colonne di a in altrettante corrispondenti di* h. Così questi nuovi determinanti che entrano in ΣM_i e che generalmente parlando sono dell'ordine $n$esimo, come quello M, sono, anche in generale, in numero

$$\frac{n(n-1)(n-2)\quad .\ .\ .\quad (n-i+1)}{1.2.3.\quad .\ .\ .\quad i}$$

Da ciò ne viene che l'ultimo termine ΣM_n è d'un sol determinante, cioè

$$(4)\qquad \Sigma M_n = \begin{vmatrix} h_{1,1} h_{1,2} & . & . & . & h_{1,n} \\ h_{2,1} h_{2,2} & . & . & . & h_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ h_{n,1} h_{n,2} & . & . & . & h_{n,n} \end{vmatrix}$$

La formola (2) è di somma importanza, come saremo per

[1] *Brioschi* . . . La teorica dei determinanti e le sue applicazioni; pag. 5.

Spottiswoode. — Elementary theorems relating to determinants; pag. 13; teor. I.

vedere; ed ei basta formare lo sviluppo algebrico del solo primo determinante M, per ottener subito gli altri contenuti ne' termini sommatori. E comechè essa è tratta dalle prime nozioni de' determinanti, devesi tenere come una formola *fondamentale* di questo nuovo algoritmo.

2. Per venire a qualche applicazione, supponiamo primamente che sia in (1)

$$a_{r,r}=1\;;\; h_{1,1}=0\;;\; a_{r,s}=a_{s,r}=1\;;\; h_{r,s}=h_{s,r}=0:$$

in questo caso tutti i termini precedenti il penultimo s'annullano, perchè i determinanti che entrano in essi, per aver, almeno due colonne identiche, svaniscono; nullo ancora diviene l'ultimo termine, per avere una colonna ed una linea di zeri; e finalmente dei determinanti che entrano in ΣM_{n-1} non ne resta che un solo, e propriamente il seguente :

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 1 & h_{2,2} & 0 \ldots 0 \\ . & . & . \quad . \quad . \\ 1 & 0 & 0 \ldots h_{n,n} \end{vmatrix} = h_{2,2}h_{3,3}\ \ldots\ h_{n,n}.$$

Laonde si avrà.

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots & 1 \\ 1 & 1+h_{2,2} & 1 \,.. & 1 \\ . & . & . \quad . \quad . & . \\ 1 & 1 & . \quad . \quad . & 1+h_{m,n} \end{vmatrix} = h_{2,2}h_{3,3}\ \ldots\ h_{n,n}.$$

Supponendo in secondo luogo che fosse $h_{1,1}=1$, e tutto il resto come nel caso precedente, allora componendo i termini della formola (2), giusta l'ipotesi ammessa, e con la regola superiormente data, tutti quelli che precedono ΣM_{n-1}

svaniranno, per ragioni analoghe a quelle indicate nel caso precedente, e resteranno solo i determinanti di questo ultimo termine e l'ultimo ΣM_n. Ciascun determinante di ΣM_{n-1} sarà della forma (5) e ΣM_n sarà il (4) ridotto ai soli elementi principali.

Laonde avremo :

$$(7)\quad \begin{vmatrix} 1+h_{1,1} & 1 & 1 \dots 1 \\ 1 & 1+h_{2,2} & 1 \dots 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 \dots & 1+h_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{cases} h_{2,2}h_{3,3} \dots h_{n,n} \\ + h_{3,3}h_{4,4} \dots h_{n,n} \\ \dots \\ + h_{1,1}h_{2,2} \dots h_{n,n} \end{cases}$$

È da notare che in questa formola il solo ultimo termine contiene tutti gli n elementi $h_{1,1}$, ec: ciascun altro termine contiene sempre un elemento di meno.

Le due formole (6) e (7) trovansi altramente dimostrate dal prof. *Ferreres* nel *Quarterly Journal* (Marzo 1856) pag. 364.

3. Se si muti $h_{r,r}$ in x, le medesime formole daranno :

$$(8)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix}_{n-1} = x^{n-1}; \quad [1]$$

$$(9)\quad \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix}_{n} = nx^{n-1} + x^n;$$

[1] L'indice $n-1$ messo sotto il determinante serve per indicare

e mutando in queste $1+x$ in x, e quindi x in $x-1$. verrà.

$$(10)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & \dots & . & x \end{vmatrix}_{n-1} = (x-1)^{n-1} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{n-1};$$

$$(11)\quad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x \end{vmatrix}_{n} = + n(x-1)^{n-1} + (x-1)^{n}.$$

Ponendo finalmente $1+h_{r,r} = \alpha_{r,r}$, e quindi $h_{r,r} = \alpha - 1$, la (6) darà :

$$(12)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha_{2,2} & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = (\alpha_{2,2}-1)(\alpha_{3,3}-1)\dots(\alpha_{n,n}-1);$$

e la (7) darà :

$$(13)\quad \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & 1 & 1 \dots 1 \\ 1 & \alpha_{2,2} & 1 \dots 1 \\ . & . & . \\ 1 & 1 & 1 \dots \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_{2,2}-1)(\alpha_{3,3}-1)\dots(\alpha_{n,n}-1) \\ +(\alpha_{3,3}-1)(\alpha_{4,4}-1)\dots(\alpha_{1,1}-1) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ +(\alpha_{1,1}-1)(\alpha_{2,2}-1)\dots(\alpha_{n-1,n-1}-1)(\alpha_{n,n}-1). \end{array} \right.$$

Conviene tener presente nell'applicazione di questa formola,

che gli elementi principali contenenti x e quindi le stesse x sono soltanto $n-1$. È però il determinante (8) è dell'ordine nesimo, come il (9).

che solo l'ultimo termine contiene n fattori; ciascun altro ne contiene soltanto $n-1$.

Secondo la (10) abbiamo :

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^m \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^n = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{m+n};$$

e dal paragone delle (11) e (10) risulta

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x \end{vmatrix}_n + n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x \end{vmatrix}_{n-1}$$

4. Se nel proposto determinante (1) si suppongono le $h_{r,r}$ mutate in $i\,h_{r,r}$, essendo i l'immaginario $\sqrt{-1}$, allora la formola (2) essa pure verrà a dividersi in due parti; l'una del tutto reale, l'altra moltiplicata per i. Così, nel caso di n pari, avremo:

$$(16)\,P_{\pm i} = \begin{vmatrix} a_{1,1} \pm ih_{1,1} & a_{1,2} \pm ih_{1,2} & \dots & a_{1,n} \pm ih_{1,n} \\ a_{2,1} \pm ih_{2,1} & a_{2,2} \pm ih_{2,2} & \dots & a_{2,n} \pm ih_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} \pm ih_{2,1} & a_{n,2} \pm ih_{n,2} & \dots & a_{n,n} \pm ih_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{cases} M - \Sigma M_2 + \Sigma M_4 \dots \quad \Sigma M_n \\ \pm(\Sigma M_1 - \Sigma M_3 + \Sigma M_5 \dots + \Sigma M_{n-1})i. \end{cases}$$

e quando n è impari, si ha;

$$(17)\,P_{\pm i} = \begin{cases} M - \Sigma M_2 + \Sigma M_4 \dots \pm \Sigma M_{n-1} \\ \pm(\Sigma M_1 - \Sigma M_3 + \Sigma M_5 \dots \mp \Sigma M_n)i. \end{cases}$$

in cui M ha il significato (3) e ΣM_n il significato (4).

5. Secondo le formole (5) e (6) un prodotto di n fattori binomii della forma $x-a_{r,r}$ può essere scritto sotto forma di determinante così;

$$(18)\quad (x-a_{1,1})(x-a_{2,2})(x-a_{3,3})\ldots x-a_{n,n})=$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & x-a_{1,1} & 0 & 0 & \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & & 0 & x-a_{n,n} \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1\ldots 1 \\ 1 & 1+x-a_{1,1} & 1 & \ldots 1 \\ & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & 1\ldots 1+x-a_{n,n} \end{vmatrix}_n;$$

ciascuno di questi determinanti essendo dell'ordine $(n+1)$ esimo.

Ora a qualunque di essi vogliasi applicare la formola (2) e la regola superiormente prescritta, si trova subito lo sviluppo del proposto prodotto. Anzi, per più semplicità possiamo considerare il determinante di $n$esimo ordine.

$$\begin{vmatrix} x-a_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-a_{2,2} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & x-a_{n,n} \end{vmatrix},$$

equivalente a ciascuno dei precedenti. E formando il primo termine M della nominata formola, abbiamo

$$M=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ . & . & . & \\ 0 & 0 & 0\ldots & x \end{vmatrix}_n = xxx\ldots x = x^n;$$

e quindi seguendo la regola annunziata, avremo subito il

termine ΣM_1, *cangiando successivamente nel precedente prodotto* $xxx \ldots x$, *il primo* x *in* $-a_{1,1}$ e il secondo in $-a_{2,2}$ ec., *l'nesimo in* $-a_{n,n}$. Similmente s'avrà il secondo termine ΣM_2 *cangiando successivamente in detto prodotto due* x *in due corrispondenti* a, e così appresso. Laonde s'avrà:

$$(19)\left\{\begin{aligned}&(x-a_{1,1})(x-a_{2,2})(x-a_{3,3}) \ldots (x-a_{n,n})\\ &= x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n\,,\end{aligned}\right.$$

essendo:

$$(20)\left\{\begin{aligned}&A_1 = -(a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + \ldots + a_{n,n})\\ &A_2 = +(a_{1,1}a_{2,2} + \ldots\ a_{1,1}a_{n,n} + a_{2,2}a_{3,3} + \ldots\\ &\qquad\qquad + a_{3,3}a_{n,n} + \ldots + a_{n-1,n-1}a_{n,n})\\ &A_3 = -(a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,1}a_{2,2}a_{4,4} + \ldots\\ &\qquad + a_{1,1}a_{n-1,n-1}a_{n,n} + \ldots + a_{n-2,n-2}a_{n-1,n-1}a_{n,n})\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &A_n = (-1)^n a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} \ldots a_{n,n}\,;\end{aligned}\right.$$

il che già si sapeva.

Questo modo di dimostrar la formola (19) ci sembra da preferirsi a quelli ordinariamente adoperati in Algebra. Ed è pure da notare che la formola del binomio la si deduce direttamente dalla formola (2) senza passare per la (19), e solo che sia premessa la teoria delle combinazioni.

6. Siccome il primo membro (19) s'annulla per ciascun valore $x = a_{1,1}$ $x = a_{2,2} \ldots x = a_{n,n}$, nè per altri, ed è divisibile per ciascuno dei fattori $x-a_{1,1} \ldots x-a_{n,n}$, così pure avverrà del secondo membro. La proposizione reciproca, cioè, che ogni polinomio di grado n sia scomponibile in n fattori del primo grado è già nota in Algebra.

Pertanto un equazione del grado n possiamo rappresentarla con una qualunque delle tre formole seguenti:

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & x-a_2 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots x-a_{n,n} \end{vmatrix} = 0,$$

la prima ed ultima delle quali essendo soltanto simboliche Posto ciò, consideriamo separatamente il polinomio,

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

$$= \begin{vmatrix} x-a_1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & x-a_2 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots x-a_n \end{vmatrix}$$

e poniamo in esso $x+y$ in luogo di x; avremo;

$$f(x+y) = \begin{vmatrix} x-a_1+y & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & x-a_2+y & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots x-a_n+y \end{vmatrix}$$

Il primo termine dello sviluppo, secondo la formola (2), sarà;

$$M = \begin{vmatrix} x-a_1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & x-a_2 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots x-a_n \end{vmatrix} = f(x)$$

e s'avran gli altri termini, operando quivi, come si fece

per lo sviluppo della formola (19); o più semplicemente con la regola del n. 5. Così s'avrà subito:

$$\Sigma M_1 = \left\{ \begin{array}{l} (x-a_2)(x-a_3)\ \ldots\ (x-a_n) \\ +(x-a_1)(x-a_3)\ \ldots\ (x-a_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(x-a_1)(x-a_2)\ \ldots\ (x-a_{n-1}) \end{array} \right\} y$$

$$\Sigma M_2 = \left\{ \begin{array}{l} (x-a_3)(x-a_4)\ \ldots\ (x-a_n) \\ +(x-a_1)(x-a_4)\ \ldots\ (x-a_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(x-a_1)(x-a_2)\ \ldots\ (x-a_{n-2}) \end{array} \right\} y^2$$

. . . .

$$\Sigma M_n = y^n.$$

Ora per avere gli sviluppi dei coefficienti delle varie potenze di y, racchiusi nei precedenti termini, consideriamo primamente quello ov' entra y a primo grado. E siccome ogni termine di quel coefficiente è un prodotto di $n-1$ fattori, si potrà intenderlo sviluppato secondo la (19) e darà per sviluppo un polimonio di grado $n-1$. Consideriamo il prodotto che forma il termine $r$esimo; e poichè il coefficiente di x, nel termine di posto $i+1$, dev'essere la somma dei prodotti dei secondi termini presi ad i ad i; così, mancando in quel prodotto il fattore $x-a_r$, quel coefficiente sarà eguale allà somma dei prodotti contenuti nel coefficiente A_i del proposto polinomio, meno i prodotti di a_r per tutti i rimanenti termini $a_1 \ldots a_n$ presi ad $i-1$, ad $i-1$. E comecchè inoltre tutti i termini contenuti in ΣM_1 sono n (n.° 1), così nello sviluppo totale di tutti i prodotti

di ΣM_1 il coefficiente di x nel termine $(i + i)$ esimo dello sviluppo sarà:

$$(24) \qquad A'_i = (nA_i - iA_i) = (n - i)A_i ,$$

Pertanto, dinotando con $f'(x)$ il nominato coefficiente di y, avremo:

$$(25) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma M_1 = f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)A_1x^{n-2} \\ + (n-2)A_2x^{n-3} + \ldots + A_{n-2}x + A_{n-1} \end{array} \right.$$

Per aver lo sviluppo di ΣM_2, si osservi, che se dalla prima linea di ΣM_1 si tolga un fattore per volta, noi avremo $n - 1$ prodotti di quelli che entrano in ΣM_2, e però la somma di questi prodotti sviluppati avrebbe, secondo la formola (24) per coefficiente del termine $(i + 1)$esimo:

$$(26) \quad A''_i = (n - 1 - i)A'_i = (n - 1 - i)(n - 1)A_i .$$

Ora se si facesse lo stesso con ciascuna delle seguenti linee di ΣM_1, avremmo tutti gli altri prodotti che entrano in ΣM_2, ma però riunendo tutti i prodotti formati al modo indicato, ciascuno di quelli contenuto in ΣM_2 si troverà raddoppiato; e però nello sviluppo totale, il coefficiente (26) dovrà essere ridotto a metà, e sarà:

$$A''_i = \frac{(n-1)[n-(i+1)]}{1.2} A_i .$$

Pertanto dinotando con $f''(x)$ il polimonio in x che risulta dallo sviluppo, ad eccezione del coefficiente $\frac{1}{1.2}$, avremo:

$$(27) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma M_2 = \frac{1}{1.2} f''(x) = \frac{1}{1.2} [n(n-1)x^{n-2} \\ + (n-1)(n-2)A_1x^{n-3} + (n-2)(n-3)A_2x^{n-4} + \ldots]. \end{array} \right.$$

Continuando il ragionamento si giunge alla nota formola:

$$(28)\quad \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f'(x)y^2 + \frac{1}{1.2} f''(x)y^2 \\ + \frac{1}{1.2.3} f'''(x)y^3 + \ldots + y^n . \end{cases}$$

Deducendo la formola (28) nel modo qui innanzi dichiarato si ha il vantaggio di avere ad un tratto le espressioni delle funzioni derivate svolte in prodotti di fattori di primo grado. Così dinotando con a_1, a_2, a_3, ... a_n le n radici della equazione

$$(29)\quad f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

si ha;

$$f'(x) = \begin{Bmatrix} (x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_n) \\ + (x - a_1)(x - a_3) \ldots (x - a_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{n-1}) \end{Bmatrix};$$

$$\tfrac{1}{2} f''(x) = \begin{Bmatrix} (x - a_3)(x - a_4) \ldots (x - a_n) \\ (x - a_1)(x - a_4) \ldots (x - a_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{n-2}) \end{Bmatrix};$$

ec... —

donde subito si deducono le note espressioni di

$$f'(a_1), f'(a_2), \ldots f'(a_n); \tfrac{1}{2} f''(a_1), \tfrac{1}{2} f''(a_2) \ldots \tfrac{1}{2} f''(a_n); \text{ ec.}$$

7. Anche, con molta semplicità si deduce la regola per fare sparire da un equazione il secondo termine. Imperocchè se nella (29), messa sotto la forma:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & 0 & 0\dots 0 \\ 0 & x-a_2 & 0\dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 & 0\dots x-a_n \end{vmatrix} = 0$$

si ponga $x = y + h$, la formola fondamentale (2), o meglio ancora la regola del n. 5, dà immediatamente per coefficiente del secondo termine.

$$h + a_1 + h + a_2 + \ldots + h + a_n = nh + A_1\,,$$

il quale si fa svanire ponendo $h = -\frac{A}{n}$, come si sapeva.

8. Passiamo ora ad un altro genere di applicazione dei determinanti, e perciò riprendiamo le formole (16), (17) cioè:

$$(30)\quad P_{a+ih} = \begin{vmatrix} a_{1,1}+ih_{1,1} & a_{1,2}+ih_{1,2} & \ldots & a_{1,n}+ih_{1,n} \\ a_{2,1}+ih_{2,1} & a_{2,2}+ih_{2,2} & \ldots & a_{2,n}+ih_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}+ih_{n,1} & a_{n,2}+ih_{n,2} & \ldots & a_{n,n}+ih_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} M - \Sigma M_2 + \Sigma M_4 \ldots \pm \Sigma M_n \\ + (\Sigma M_1 - \Sigma M_3 + \Sigma M_5 \ldots \mp \Sigma M_{n-1})i \end{array} \right\};$$

$$(31)\quad P_{a-ih} = \left\{ \begin{array}{c} M - \Sigma M_2 + \Sigma M_4 \ldots \pm \Sigma M_n \\ - (\Sigma M_1 - \Sigma M_3 + \Sigma M_5 \ldots \mp \Sigma M_{n-1})i \end{array} \right\}$$

quando n è pari; e

$$(32)\quad P_{a+ih} = \left\{ \begin{array}{c} M - \Sigma M_2 + \Sigma M_4 \ldots \pm \Sigma M_{n-1}) \\ + (\Sigma M_1 - \Sigma M_3 + \Sigma M_5 \ldots \pm \Sigma M_n)i \end{array} \right\},$$

$$(33)\ P_{a-ih}=\begin{Bmatrix} M-\Sigma M_2+\Sigma M_4\ \ldots\ \pm\Sigma M_{n-1} \\ -(\Sigma M_1-\Sigma M_3+\Sigma M_5\ldots\pm\Sigma M_n)i \end{Bmatrix},$$

quando n è impari.

Laonde, moltiplicando (30) per (31) e (32) per (33), avremo, per n pari:

$$(34)\ P_{a+ih}P_{a-ih}=\begin{Bmatrix} (M-\Sigma M_2+\Sigma M_4\ \ldots\ \pm\Sigma M_n)^2 \\ +(\Sigma M_1-\Sigma M_3+\Sigma M_5\ldots\mp\Sigma M_{n-1})^2 \end{Bmatrix};$$

e quando n è impari, sarà:

$$(35)\ P_{a+ih}P_{a-ih}=\begin{Bmatrix} (M-\Sigma M_2+\Sigma M_4\ \ldots\ \pm\Sigma M_{n-1})^2 \\ +(\Sigma M_1-\Sigma M_3+\Sigma M_5\ldots\pm\Sigma M_n)^2 \end{Bmatrix}$$

D' altra parte si sa che il prodotto de' due determinanti (30), (31) è un terzo determinante

$$(36)\ Q=\begin{vmatrix} h_{1,1}h_{1,2}\ \ldots\ h_{1,n} \\ h_{2,1}h_{2,2}\ \ldots\ h_{2,n} \\ \ldots\ldots \\ h_{n,1}h_{n,2}\ \ldots\ h_{n,n} \end{vmatrix}$$

i cui elementi si traggono, come si sa (*) moltiplicando quelli di (30) e (31) sia per linee o per colonne, sia pure per linee e colonne.

9. Effettuando la moltiplicazione per linee, si trova agevolmente su gli elementi principali

$$(37)\qquad h_{r,r}=\sum_{s'=1}^{s'=n}(a^2_{r,s'}+h^2_{r,s'})=\alpha_{r,r}\ .$$

(*) Brioschi -- Oper. cit.; pag. 23.

e, se r ed s sono due indici differenti:

$$(38)\qquad h_{r,s}=\alpha_{r,s}-i\beta_{r,s};\quad h_{s,r}=\alpha_{r,s}+i\beta_{r,s},$$

essendo:

$$(39)\quad\left\{\begin{aligned}\alpha_{r,s}&=\sum_{s'=1}^{s'=n}(a_{r,s'}\,a_{s,s'}+h_{r,s'}\,h_{s,s'});\\ \beta_{r,s}&=\sum_{s'=1}^{s'=n}(a_{r,s'}\,h_{s,s'}-h_{r,s'}\,a_{s,s'});\end{aligned}\right.$$

Ed è da notare che, secondo queste formole, i valori di β si traggono da quelli di α cangiando in questi il secondo a in h, il secondo h in a, e il segno $+$ in $-$ nel secondo termine.

Pertanto il determinante (36) sarà della forma

$$(40)\ Q=\begin{vmatrix}\alpha_{1,1} & \alpha_{1,2}-i\beta_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,n}-i\beta_{1,n}\\ \alpha_{1,2}+i\beta_{1,2} & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{2,n}-i\beta_{2,n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{1,n}+i\beta_{1,n} & +i\beta_{n,2} & \ldots & \alpha_{n,n}\end{vmatrix}$$

e si potrà svilupparlo, secondo le stesse formole (30) e seguenti; per la qual cosa giova notare, come nello sviluppo l'ultimo termine essendo della forma seguente:

$$(41)\quad\begin{vmatrix}0 & -\beta_{1,2} & \ldots & -i\beta_{1,n}\\ +i\beta_{1,2}\ldots & 0 & \ldots & -i\beta_{1,n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ +i\beta_{1,n}+i\beta_{2,n} & & \ldots & 0\end{vmatrix}$$

sarà un determinante gobbo simmetrico, e però eguale a zero o ad un quadrato, secondo che n è impari o pari (*)

Ponendo:

$$(42)\quad A = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

sarà, se n è pari

$$(43)\quad Q = \begin{cases} A - \Sigma A_2 + \Sigma A_4 \ \ldots \ \pm \Sigma A_n \\ + (\Sigma A_1 - \Sigma A_3 + \Sigma A_5 \ \ldots \ \pm A_{n-1})i \,; \end{cases}$$

e se n è impari, sarà

$$(44)\quad Q = \begin{cases} A - \Sigma A_2 + \Sigma A_4 \ \ldots \ \pm \Sigma A_{n-1} \\ + (\Sigma A_1 - \Sigma A_3 + \Sigma A_5 \ \ldots \ \pm A_n)i \end{cases}$$

nelle quali formole il termine ΣA_n rappresenta il determinante (41) e però sarà un quadrato o pure sarà nullo, secondo che n è pari o impari.

Ora poichè, per la teorica dei determinanti, è

$$P_{n+ih}\, P_{n-ih} = Q,$$

avremo se n è pari:

$$(45)\quad \begin{Bmatrix} (M - \Sigma M_2 + \Sigma M_4 \ \ldots \ \pm \Sigma M_n)^2 \\ + (\Sigma M_1 - \Sigma M_3 + \Sigma M_5 \ \ldots \ \pm \Sigma_{n-1})^2 \end{Bmatrix}$$

$$= A - \Sigma A_2 + \Sigma A_4 \ \ldots \ \pm \Sigma A_n \,;$$

$$(46)\quad \Sigma A_1 - \Sigma A_3 + \Sigma A_5 \ \ldots \ \mp \Sigma A_{n-1} = 0$$

e quando n è impari, sarà:

(*) Brioschi - Oper. cit. pag. 55 e 57

$$(47)\quad \left\{\begin{array}{l}(M-\Sigma M_2+\Sigma M_4 \quad . \quad . \quad . \quad \pm \Sigma M_n)^2 \\ +(\Sigma M_1-\Sigma M_3+\Sigma M_5 \quad . \quad . \quad . \quad \pm \Sigma M_{n-1})^2\end{array}\right\} =$$

$$A-\Sigma A_2+\Sigma M_4 \quad . \quad . \quad . \quad \pm \Sigma A_{n-1}\ ;$$

$$(48)\qquad \Sigma A_1-\Sigma A_3+\Sigma A_5 \quad . \quad . \quad . \quad \pm \Sigma A_{n-2}=0.$$

Quando

$$(49)\qquad \sum_{s'=n}^{s'=n}(a_{r,s'}\ h_{s,s'}-h_{r,s'}\ a_{s,s'})=0$$

il determinante (40) si riduce al solo determinante (42); si che in questo caso non resterà ne'secondi membri delle (45) e (47) che solo il primo termine A. —

10. Se la moltiplicazione de' due determinanti P_{a+ih}. P_{a-ih} si effettua per linee e colonne, agevolmente si trova, che un elemento qualunque $h_{r,s}$ del prodotto è della forma

$$(50)\qquad h_{r,s}=\alpha_{r,s}-i\beta_{r,s},$$

in cui

$$(51)\quad \left\{\begin{array}{l}\alpha_{r,s}=\sum_{s'=n}^{s'=n}(a_{r,s}\ a'_{s',s}+h_{r,s'}\ h'_{s',s})\ ; \\ \\ \beta_{r,s}=\sum_{s'=1}^{s'=n}(a_{r,s'}\ h'_{s',s}-h_{r,s'}\ a'_{s',s}).\end{array}\right.$$

Anche qui β si deduce da α, come nelle formole (39), e le condizioni perchè dal prodotto Q svanisca da se stessa la parte immaginaria sono date dalla formola:

$$(52)\qquad \sum_{s'=1}^{s'=n}(a_{r,s'}\ h'_{s',s}-h_{r,s'}\ a'_{s',s})=0$$

dando ad r tutti i valori interi da 1 ad n, e però codeste condizioni sono quelle medesime dedotte dalla (49), come doveva essere. —

11. Passiamo ora a fare l'applicazione delle formole precedenti a qualche caso particolare, e sia primamente:

$$(53)\quad \begin{cases} P_{a+ih} = \begin{vmatrix} a_{1,1}+ih_{1,1} & a_{1,2}+ih_{1,2} \\ a_{2,1}+ih_{2,1} & a_{2,2}+ih_{2,2} \end{vmatrix}, \\ P_{a-ih} = \begin{vmatrix} a_{1,1}-ih_{1,1} & a_{1,2}-ih_{1,2} \\ a_{2,1}-ih_{2,1} & a_{2,2}-ih_{2,2} \end{vmatrix}, \end{cases}$$

e secondo la formola (34) e la regola del n. 1 sarà:

$$(54)\qquad P_{a+ih} \,.\, P_{a-ih} =$$

$$\left|\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{1,1} & h_{2,2} \end{vmatrix}\right|^2 + \left|\begin{vmatrix} h_{1,1} & a_{1,2} \\ h_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & h_{1,2} \\ a_{2,1} & h_{2,2} \end{vmatrix}\right|^2 =$$

$$\begin{cases} (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} + h_{1,2}h_{2,1} - h_{1,1}h_{2,2})^2 \\ + (h_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}h_{2,1} + a_{1,1}h_{2,2} - h_{1,2}a_{2,1})^2. \end{cases}$$

Nel tempo stesso le formole (37), (38) e (39) danno:

$$\alpha_{1,1} = a^2_{1,1} + h^2_{1,1} + a^2_{1,2} + h^2_{1,2}\,; \quad \beta_{1,1} = 0\,;$$

$$\alpha_{2,2} = a^2_{2,1} + h^2_{2,1} + a^2_{2,2} + h^2_{2,2}\,; \quad \beta_{2,2} = 0\,;$$

$$\alpha_{1,2} = a_{1,1}a_{2,1} + h_{1,1}h_{2,1} + a_{1,2}a_{2,2} + h_{1,2}h_{2,2} = \alpha_{2,1}$$

$$\beta_{1,2} = a_{1,1}h_{2,1} - h_{1,1}a_{2,1} + a_{1,2}h_{2,2} - h_{1,2}a_{2,2} = -\beta_{2,1}\,;$$

quindi per la (42)

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{cases} (a^2_{1,1} + h^2_{1,1} + a^2_{1,2} + h^2_{1,2}) \\ (a^2_{2,1} + h^2_{2,1} + a^2_{2,2} + h^2_{2,2}) \\ - (a_{1,1}a_{2,1} + h_{1,1}h_{2,1} + a_{1,2}a_{2,2} + h_{1,2}h_{2,2})^2\,; \end{cases}$$

$$\Sigma A_1 = \begin{vmatrix} \beta_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \alpha_{1,2} & \beta_{2,2} \end{vmatrix} = 0\,;$$

$$\Sigma A_2 = \begin{vmatrix} 0 & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & 0 \end{vmatrix} = (a_{1,1}h_{2,1} - h_{1,1}a_{2,1} + a_{1,2}h_{2,2} - h_{1,2}a_{2,2})^2$$

e quindi per la (43)

$$(55)\quad Q = \begin{cases} (a^2_{1,1} + h^2_{1,2} + a^2_{1,2} + h^2_{1,2})(a^2_{2,1} + h^2_{2,1} + a^2_{2,2} + h^2_{2,2}) \\ -\,(a_{1,1}a_{2,1} + h_{1,2}h_{2,1} + a_{1,2}a_{2,2} + h_{1,2}h_{2,2})^2 \\ -\,(a_{1,1}h_{2,1} - h_{1,1}a_{2,1} + a_{1,2}h_{2,2} - h_{1,2}h_{2,2})^2 \end{cases}$$

Dal paragone delle (54) e (55) risulta subito la formola seguente:

$$(56)\quad \begin{cases} (a^2_{1,1} + h^2_{1,1} + a^2_{1,2} + h^2_{1,2})(a^2_{2,1} + h^2_{2,1} + a^2_{2,2} + h^2_{2,2}) = \\ (a_{1,1}a_{2,1} + h_{1,1}h_{2,1} + a_{1,2}a_{2,2} + h_{1,2}h_{2,2})^2 \\ +\,(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} + h_{1,2}h_{2,1} - h_{1,1}h_{2,2})^2 \\ +\,(a_{1,1}h_{2,1} - h_{1,1}a_{2,1} + a_{1,2}h_{2,2} - h_{1,2}a_{2,2})^2\,; \end{cases}$$

la quale costituisce la proposizione fondamentale per la dimostrazione del teorema: *ogni numero è la somma di quattro quadrati.* (*)

La medesima formola contiene come caso particolare l'altra già nota del sig. CAUCHY.

$$(57)\quad \begin{cases} (\alpha^2_1 + \beta^2_1 + \gamma^2_1)(\alpha^2_2 + \beta^2_2 + \gamma^2_2) - (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2)^2 \\ = (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)^2 + (\gamma_2\alpha_1 - \gamma_1\alpha_2)^2 + (\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2)^2\,, \end{cases}$$

la quale si trae dalla (55), ponendo:

$$h_{1,2} = h_{2,2} = 0\,;\quad a_{1,1} = \alpha_1\,,\ h_{1,1} = \beta_1\,;$$
$$a_{2,1} = \alpha_2,\ h_{2,1} = \beta_2\,;\quad a_{1,2} = \gamma_1,\ a_{2,2} = \gamma_2.$$

(*) LEGENDRE. Théorie des nombres To. 1.er pag. 213.

12. É notevole come la stessa (56) o anche più semplicemente la (57) conduca ad un elegante teorema geometrico. In effetti, ponendo

$$\alpha_2 = x\,,\ \beta_2 = y\,,\ \gamma_2 = z\,,$$

la (57) può esser messa sotto la forma seguente

$$(58)\ \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z}{\sqrt{(\alpha^2_1 + \beta^2_1 + \gamma^2_1)}}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_1 z - \gamma_1 x}{\sqrt{(\alpha^2_1 + \beta^2_1 + \gamma^2_1)}}\right)^2\\ &+ \left(\frac{\beta_1 z - \gamma_1 y}{\sqrt{(\alpha^2_1 + \beta^2_1 + \gamma^2_1)}}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_1 y - \beta_1 x}{\sqrt{(\alpha^2_1 + \beta^2_1 + \gamma^2_1)}}\right)^2\\ &= x^2 + y^2 + z^2.\end{aligned}\right.$$

Ora i termini del primo membro rappresentano ordinatamente i quadrati delle distanze

d'un punto $M(x,y,z)$ da un piano $(P), \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' = 0,$

» » $N'(x,0,z)$ » » $(\Pi'), -\gamma_1 x' + \beta_1 y' + \alpha_1 z' = 0,$

» » $N''(0,y,z)$ » » $(\Pi''), \alpha_1 x' - \gamma_1 y' + \beta_1 z' = 0,$

» » $N(x,y,0)$ » » $(\Pi), -\beta_1 x' + \alpha_1 y' + \gamma_1 z' = 0,$

questi ultimi tre punti, com'è chiaro sono le proiezioni del punto $M\ (x,\ y,\ z)$ su i tre piani delle coordinate; e il secondo membro (57) dinota il quadrato della distanza dello stesso punto M dall'origine.

Inoltre, supponendo essere rettangolari gli assi, si ha:

$$\cos(P_1\Pi) = \frac{\gamma^2_1}{\alpha^2_1 + \beta^2_1 + \gamma^2_1} = \cos^2[P,(x'y')]\,,$$

$$\cos(P_1\Pi') = \frac{\beta^2_1}{\alpha^2_1 + \beta^2_1 + \gamma^2_1} = \cos^2[P,(x'z')]$$

$$\cos(P_1\Pi'') = \frac{\alpha^2_1}{\alpha^2_1 + \beta^2_1 + \gamma^2_1} = \cos^2[P,(y'z')]$$

Laonde : *se pel vertice O d' un parallelepipedo rettango-*

lo, i cui lati adiacenti sieno a , b , c , *si conduca ad arbitrio un piano* (P) , e quindi *per lo stesso vertice si conducano tre altri piani* (Π), (Π′) (Π″), *inclinati talmente da essere*

$$\cos(P,\Pi) = \cos^2[P,(ab)]\ ;$$

$$\cos(P,\Pi') = \cos^2[P,(ac)];\ \cos(P,\Pi'') = \cos^2[P,bc)]\ ,$$

abbassando dal vertice M (*opposto ad O*) e dai tre vertici N, N′, N″, *adiacenti ad* M, *le perpendicolari, rispettivamente su i piani* (P), (Π), (Π′), (Π″), *sarà la somma dei quadrati di queste perpendicolari eguale al quadrato della diagonale* O M.

13. Applichiamo ai determinanti (54) le formole (51), ed avremo:

$$\text{(59)}\quad A - \Sigma A_2 = \begin{cases} (a^2_{1,1} + h^2_{1,1} + a_{1,2}a_{2,1} + h_{1,2}h_{2,1}) \\ \times\,(a^2_{2,2} + h^2_{2,2} + a_{1,2}a_{2,1} + h_{1,2}h_{2,1}) \\ -\,[a_{1,2}(a_{1,1} + a_{2,2}) + h_{1,2}(h_{1,1} + h_{2,2})] \\ \times\,[a_{2,1}(a_{1,1} + a_{2,2}) + h_{2,1}(h_{1,1} + h_{2,2})] \\ -\,[a_{1,2}(h_{1,1} - h_{2,2}) - h_{1,2}(a_{1,1} - a_{2,2})] \\ \times\,[a_{2,1}(h_{1,1} - h_{2,2}) + h_{2,1}(a_{1,1} - a_{2,2})] \\ +\,(a_{1,2}h_{2,1} - h_{1,2}a_{2,1})^2\ ; \end{cases}$$

$$\Sigma A_1 = \begin{cases} -\,[a_{1,2}(a_{1,1} + a_{2,2}) + h_{1,2}(h_{1,1} + h_{2,2})] \\ \times\,[a_{2,1}(h_{1,1} - h_{2,2}) - h_{2,1}(a_{1,1} - a_{2,2})] \\ -\,[a_{2,1}(a_{1,1} + a_{2,2}) + h_{2,1}(h_{1,1} + h_{2,2})] \\ \times\,[h_{1,2}(a_{1,1} - a_{2,2}) - a_{1,2}(h_{1,1} - h_{2,2})] \\ -\,(a_{1,2}h_{2,1} - h_{1,2}a_{2,1})(a^2_{1,1} - a^2_{2,2} - h^2_{2,2}). \end{cases}$$

Laonde eguagliando (59) a (54) o (55) avremo due altre formole di trasformazione numerica, che facciamo a meno di scrivere per esteso; contentandoci solo di fare osservare che nel caso in cui si supponesse

$$a_{1,1}=a_{2,2}\ ;\ h_{1,1}=h_{2,2}\ ;\ a_{1,2}=a_{2,1}\ ,\ h_{1,2}=h_{2,1}\ ,$$

il paragone della (59) con la (54) conduce alla seguente formola

$$(61)\ \begin{cases}(a^2{}_{1,1}+h^2{}_{1,1}+a^2{}_{1,2}+h^2{}_{1,2})^2=(a^2{}_{1,1}-h^2{}_{1,1}+h^2{}_{1,2}-a^2{}_{1,2})^2\\ \qquad +[2(a_{1,1}a_{1,2}+h_{1,1}h_{1,2})]^2+[2(a_{1,1}h_{1,1}-a_{1,2}h_{1,2})]^2\ ;\end{cases}$$

la quale si ricava egualmente dalla (56), e indica che «il « *quadrato d'un numero, è sempre la somma di tre soli quadrati.* »

Similmente, secondo la (48), dovendo essere la (60) eguale a zero, avremo:

$$\begin{aligned}&[a_{1,2}(a_{1,1}+a_{2,2})+b_{1,2}(h_{1,1}+h_{2,2})]\\ &[h_{2,1}(a_{1,1}-a_{2,2})-a_{2,1}(h_{1,1}-h_{2,2})]\\ (62)\quad &-[a_{2,1}(a_{1,1}+a_{2,2})+h_{2,1}(h_{1,1}+h_{2,2})]\\ &[h_{1,2}(a_{1,1}-a_{2,2})-a_{1,2}(h_{1,1}-h_{2,2})]\\ &=(a_{1,2}h_{2,1}-h_{1,2}a_{2,1})(a^2{}_{1,1}+h^2{}_{1,1}-a^2{}_{2,2}-h^2{}_{2,2})\ .\end{aligned}$$

Con l'uso delle formole da noi messe, e senza il bisogno di eseguire moltiplicazioni, prendendo a considerare determinanti d'un maggiore numero di elementi, si giunge ad altre formole di riduzione e trasformazione numerica, e quindi ad altri teoremi.

SUR UN THEOREME D'ABEL

NOTE

PAR M. A. CAYLEY.

Il y a un petit mémoire d'Abel qui porte le titre « Ueber die functionen welche der Gleichung

$$\varphi(x)+\varphi(y)=\psi(xf(y)+yf(x)$$

genugthun (Crelle tom. II, pag. 386-394, 1827). La solution du probléme est contenue dans les équations que voici, savoir $f(x)$ est une fonction definie par l'équation

$$\alpha^{2n}=(f(x)-nx)^{n+\alpha'}(f(x)-nx)^{n-\alpha'},$$

et on a alors

$$\varphi(x)=\frac{1}{n+\alpha'}\log C\,(f(x)+nx)\ ,$$

et (en reduisant un peu l' expression donné dans le mémoire)

$$\psi(x)=\frac{1}{n+\alpha'}\log C^2\alpha\left(f\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{nx}{\alpha}\right).$$

On a aussi pour $\varphi(x)$ cette autre expression en forme d'integral indefinie,

$$\varphi(x)=\int\frac{dx}{f(x)+\alpha' x}\,.$$

Car le factcur $\alpha\alpha$ par lequel dans le mémoire l'expression à côté droit est multiplié, se reduit (comme on voit sans peine) à l'unité. En comparant les deux expression de $\varphi(x)$,

on voit, qu'il est permis de prendre l'integrale depuis $x=0$, pourvu qu'on ecrit $c=1$, cela donné

$$\int_0 \frac{dx}{f(x)+\alpha' x} = \frac{1}{n+\alpha'} \log(f(x)+nx) .$$

Formule tres simple pour l'integration d'un expression algebrique la quelle ne peut pas s' exprimer à moyen des radicales.

On obtient une autre proprieté de cette fonction $f(x)$ en substituant les valeurs des fonctions φ et ψ dans l' equation originale

$$\varphi(x)+\varphi(y) = \psi(xf(y)+yf(x)) ,$$

cela donne d'abord

$$\frac{1}{n+\alpha'} \log C^2(f(x)+nx)(f(x)-nx)$$

$$= \frac{1}{n+\alpha'} \log C^2\alpha \left[f\left(\frac{xf(y)+y(x)}{\alpha}\right) + \frac{n(xf(y)+yf(x))}{\alpha}\right] .$$

et de là en reduisant, l' équation fonctionelle très simple

$$f(x)f(y)+n^2xy = \alpha f\left(\frac{xf(y)-yf(x)}{\alpha}\right) .$$

Je remarque que l'on peut sans perte de generalité écrire $\alpha=1$, et $n=1$: je mets β au lieu de α', et j'écris aussi pour plus de simplicité $f(x)=\text{X}$, $f(y)=\text{Y}$. On a alors pour l'équation qui determine la fonction

$$\text{X} \;(= f(x))$$

$$(\text{X}-x)^{1+\beta}(\text{X}+x)^{1-\beta} = 1$$

équation dans la quelle on pourrait remplacer les exposants $1+\beta$, $1-\beta$ par deux quantités quelconques.

La formule d'integration devient

$$\int_0 \frac{dx}{X+\beta x} = \frac{1}{1+\beta} \log(X+x) = -\frac{1}{1-\beta} \log(X-x)$$

formule quel on peut verifier sans peine à moyen de celle-ci

$$(X+\beta x)X' = x + \beta X$$

que l'on obtient en differentiant l'équation pour X. L'équation fonctionelle sera

$$XY + xy = f(xY + yX) .$$

Cest à dire en ecrivant $xY + yX = z$, $XY + xy = Z$ on dont avoir

$$(Z - z)^{1+\beta} (Z + z)^{1-\beta} = 1$$

ce qui se verifie tout de suit à moyen des équations.

$$Z - z = (X - x)(Y - y) , \quad Z + z = (X + x)(Y + y) .$$

Je remarque aussi qu'en prenant le quotient des derivées de cette équation par rapport a x et y on obtient

$$\frac{X'-Y'}{X'Y'-1} = \frac{\frac{X}{x} - \frac{Y}{y}}{\frac{X}{x} \cdot \frac{Y}{y} - 1}$$

la quelle est une proprieté de la fonction X et de la derivée X'.

Londres 17 Juillet 1857



RICERCHE RIGUARDANTI LA RISOLUZIONE PER SERIE DI QUALUNQUE EQUAZIONE

DEL PROF. EMMANUELE FERGOLA

Signore

Le trasmetto un sunto di alcune mie ricerche riguardanti la risoluzione per serie di qualunque equazione, sperando che Ella vorrà essere compiacente pubblicarlo nei suoi pregevoli Annali di matematica.

1. Sia $fx = 0$ un'equazione qualunque, ed x, una sua radice. Rappresento con Fx una funzione arbitraria, con z_0 un numero positivo qualunque, e con x_0 una radice dell'equazione

$$z_0(fx + Fx) = Fx;$$

indico finalmente con z_0', z_0'', z_0''', ... le derivate successive di $\frac{Fx_0}{fx_0 + Fx_0}$ per rapporto ad z_0. Sarà

$$(1) \quad x_1 = x_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (1 - z_0)^n \sum_{n=1} (-1)^n C \frac{\left(\frac{z''_0}{\Pi 2}\right)^{p_2} \left(\frac{z'''_0}{\Pi 3}\right)^{p_3} \cdots \left(\frac{z^{(n)}_0}{\Pi n}\right)^{p_n}}{{z'_0}^{p_1}}$$

dove

$$p_1 = n + p_2 + p_3 + \ldots + p_2,$$

$$\Pi k = 1.2.3 \ldots k,$$

$$C = \frac{(-1)^{p_1}\, \Pi(p_1 - 1)}{\Pi n \Pi p_2 \Pi p_3 \ldots \Pi p_n},$$

e la somma $\sum\limits_{n-1}$ devesi estendere a tutte le soluzioni intere e positive (incluso zero) dell'equazione

$$p_2 + 2p_3 + 3p_4 + \ldots + (n-1)p_n = n - 1 .$$

La condizione per la convergenza della serie (1) è, che fra i due numeri 1 e $2z_0 - 1$ non si trovi compreso alcuno dei moduli dei valori che assume $\frac{Fx}{fx + Fx}$ per i diversi valori di x che verificano l'equazione $fxF'x - Fxf'x = 0$.

2. Se i moduli dei detti valori di $\frac{Fx}{fx + Fx}$ fossero tutti maggiori di 1, sarebbe lecito supporre $z_0 = 0$, e si avrebbe la formula:

$$(2) \qquad x_1 = x_0 + \sum_{n-1}^{n=\infty} \sum_{n-1} (-1)^n C \frac{\left(\frac{z''_0}{\Pi 2}\right)^{p_2} \left(\frac{z'''_0}{\Pi 3}\right)^{p_3} \ldots \left(\frac{z^{(n)}_0}{\Pi n}\right)^{p_n}}{{z_0^{\prime}}^{p_1}}$$

la quale esprime una radice x_1 dell'equazione $fx = 0$, mediante la radice x_0 dell'altra equazione $Fx = 0$.

3. Se nell'equazione (2) si faccia $Fx = fx_0 - fx$, risulterà

$$(3) \quad x_1 = x_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (fx_0)^n \sum_{n-1} C \frac{\left(\frac{f''x_0}{\Pi 2}\right)^{p_2} \left(\frac{f'''x_0}{\Pi 3}\right)^{p_2} \ldots \left(\frac{f^n n_0}{\Pi n}\right)^{p_n}}{(f'x_0)^{p_n}}$$

Quì x_0 è una quantità arbitraria.

4. Supponendo che l'equazione proposta sia

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} \ldots + a_1 x + a_0 = 0 ,$$

la formula (3) darà (assumendovi $x_0 = 0$)

$$(4) \qquad x_1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} a^n{}_0 \sum_{n-1} C \frac{a_2^{p_2}\, a_3^{p_3} \ldots a_m^{p_m}}{a_1^{p_1}}$$

di maniera che una radice della proposta viene espressa in funzione immediata dei suoi coefficienti.

5. Supponendo ancora l'equazione

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

e facendo

$$Fx = bx^r - a_m x^m - a_{m-1} x^{m-1} \ldots - a_1 x$$

si trova

$$(5) \qquad x_1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{k=1} C \frac{P_2^{p_2} P_3^{p_3} \ldots P_n^{p_n}}{P_1^{p_1}}$$

dove i valori di P_1, $P_2 \ldots P_n$ sono ricavati dalla formola

$$P_\mu = \frac{a_\mu}{a_0} - \frac{a_{\mu-r} b}{a^2_0} + \frac{a_{\mu-2r} b^2}{a^3_0} - \frac{a_{\mu-3r} b^3}{a^4_4} + \ldots$$

Se nell'equazione (5) si suppone (com'è permesso $b = 0$, si perviene di nuovo alla formola (4).

6· È da osservare che in tutte queste formule i valori di p_1, $p_2 \ldots p_n$, e del coefficiente C sono indipendenti dalla forma dell'equazione proposta, sicchè il calcolo di queste quantità può farsi una volta per tutte, per quei valori di n che si vorrà. La tavola seguente dà i valori degli esponenti p, e del coefficienti C per i valori di n da 1 a 7.

n	C	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
1	— 1	1	0	0	0	0	0	0
2	— 1	3	1	0	0	0	0	0
3	— 2	5	2	0	0	0	0	0
3	+ 1	4	0	1	0	0	0	0
4	— 5	7	3	0	0	0	0	0
4	+ 5	6	1	1	0	0	0	0
4	— 1	5	0	0	1	0	0	0
5	—14	9	4	0	0	0	0	0
5	+21	8	2	1	0	0	0	0
5	— 6	7	1	0	1	0	0	0
5	+ 1	6	0	0	0	1	0	0
5	— 3	7	0	2	0	0	0	0
6	—42	11	5	0	0	0	0	0
6	+84	10	3	1	0	0	0	0
6	—28	9	2	0	1	0	0	0

n	C	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p^{ι}
6	+ 7	8	1	0	0	1	0	0
6	— 1	7	0	0	0	0	1	0
6	— 28	9	1	2	0	0	0	0
6	+ 7	8	0	1	1	0	0	0
7	—132	13	6	0	0	0	0	0
7	+330	12	4	1	0	0	0	0
7	—120	11	3	0	1	0	0	0
7	+ 36	10	2	0	0	1	0	0
7	— 8	9	1	0	0	0	1	0
7	+ 1	8	0	0	0	0	0	1
7	—180	11	2	2	0	0	0	0
7	+ 72	10	1	1	1	0	0	0
7	— 8	9	0	1	0	1	0	0
7	+ 12	10	0	3	0	0	0	0
7	— 4	9	0	0	2	0	0	0

Per dare un esempio, suppongo l'equazione

$$x^5 + 2x^3 + x^2 + 10x + 1 = 0\,;$$

la formula (4) darà

$$\begin{aligned} x_1 = & -\frac{1}{10} - \frac{1}{10^3} - \frac{2}{10^5} - \frac{5}{10^7} - \frac{14}{10^9} - \frac{42}{10^{11}} - \frac{132}{10^{13}} \text{ ec.} \\ & + \frac{2}{10^4} + \frac{5.2}{10^6} + \frac{21.2}{10^8} + \frac{84.2}{10^{10}} + \frac{330.2}{10^{12}} \text{ ec.} \\ & + \frac{1}{10^6} + \frac{7}{10^8} + \frac{36}{10^{10}} \text{ ec.} \\ & - \frac{3.2^2}{10^7} - \frac{28.2^2}{10^9} - \frac{180.2^2}{10^{11}} \text{ ec.} \\ & - \frac{8.2}{10^9} \text{ ec.} \\ & + \frac{12.2^3}{10^{10}} \text{ ec.} \\ = & -0{,}10081033\ldots \end{aligned}$$

Napoli 30 Agosto 1857.



SULLA TRASFORMAZIONE DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

MEMORIA

DEL DOTT. FELICE CASORATI

I. — La Nota — pubblicata in questi Annali dal Sig. Prof. Brioschi, nella prima parte della quale applica il metodo, esposto dal Sig. Hermite per la trasformazione delle funzioni abeliane, alla trasformazione d'ordine dispari delle funzioni ellittiche, e nella seconda, a completare la questione, offre un metodo semplicissimo per la determinazione dei coefficienti nelle forme ottenute nella prima, arrivando per tal modo con somma speditezza alle formole di Jacobi — porse occasione a questo breve lavoro, nel quale si applica lo stesso metodo alla trasformazione delle funzioni ellittiche d'ordine qualsivoglia e si cercano tutte le trasformazioni alle quali il metodo stesso naturalmente conduca, avuto riguardo anche a quelle formole irrazionali per la trasformazione, che spontaneamente si presentano, partendo in tale ricerca, come qui appunto si fa, dalla considerazione delle serie doppiamente infinite, da rapporti delle quali le funzioni ellittiche vengono rappresentate.

Il paragone poi delle formole per quella trasformazione d'ordine pari, data da Abel, che costituisce il teorema XI del suo «*Précis d'une théorie des fonctions elliptiques* (1)», alle formole corrispondenti che qui si otterranno, fornirà occasione di fare qualche osservazione sul metodo usato nel Précis per ottenerle.

(1) Crellés Journal für die Mathematik. IV. Band. §. 329 — OEuvres Complétes, tom. Ier. pag. 338.

II. — Rappresenti y una funzione della x tale che sia:

$$(1) \qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)}} = a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}}$$

e si voglia determinarne la forma supponendo che:

$$(2) \qquad y\,,\quad \sqrt{(1-y^2)}\,,\quad \sqrt{(1-\lambda^2 y^2)}$$

sieno funzioni razionali delle:

$$(3) \qquad x,\quad \sqrt{(1-x^2)}\,,\quad \sqrt{(1-k^2x^2)}$$

Si ponga:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}} = 2v\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}} = 2\mathrm{K}v$$

Si hanno, avuto riguardo alla (1):

$$(4) \qquad x = \operatorname{sen} am(2\mathrm{K}v,\ k)\,,\quad y = \operatorname{sen} am(2\Delta(av+b)\,,\ \lambda)$$

dove Δ rappresenta la funzione completa corrispondente al modulo λ e b la costante introdotta dall'integrazione della (1).

Si ponga inoltre:

$$(5) \qquad \begin{cases} \theta(v) = \int(-1)^{mq}\; e^{i\pi(2m+\nu)v + \frac{i\pi}{4}(2m+\nu)^2\gamma}\,, \\[2ex] \Theta(v) = \int(-1)^{mp}\; e^{i\pi(2m+\mu)v + \frac{\pi i}{4}(2m+\mu)^2 c}\,, \end{cases}$$

nelle quali il simbolo $\int$ esprime che la m deve assumere tutti i valori numerici interi da $-\infty$ a $+\infty$ e le quantità γ e c sono definite dalle:

$$(6) \qquad \gamma = i\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\,,\quad c = i\frac{\Delta'}{\Delta}\,,$$

intendendo con K', Δ' le funzioni complete corrispondenti ai moduli k', λ' complementi dei moduli k, λ.

Indicando con

$$(7) \qquad \theta_0(v)\,,\quad \theta_1(v)\,,\quad \theta_2(v)\,,\quad \theta_3(v)$$

le quattro funzioni che si ottengono dalla $\theta(v)$ ponendo successivamente :

$$q = 1\,,\ \ 1\,,\ \ 0\,,\ \ 0\,,$$
$$\nu = 1\,,\ \ 0\,,\ \ 1\,,\ \ 0\,,$$

fra esse e le funzioni $\Theta(v)$, $\mathrm{H}(v)$ di Jacobi hanno luogo le relazioni ;

$$(8)\quad \begin{cases} \mathrm{sen}\,am(2\mathrm{K}v,k) = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\dfrac{\mathrm{H}(2\mathrm{K}v)}{\Theta(2\mathrm{K}v)} = \dfrac{1}{i\sqrt{k}.\theta_1(v)}\theta_0(v)\,, \\ \cos am(2\mathrm{K}v,k) = \dfrac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\dfrac{\mathrm{H}(2\mathrm{K}v+\mathrm{K})}{\Theta(2\mathrm{K}v)} = \dfrac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\dfrac{\theta_2(v)}{\theta_1(v)}\,, \\ \Delta am(2\mathrm{K}v,k) = \sqrt{k'}\,\dfrac{\Theta(2\mathrm{K}v+\mathrm{K})}{\Theta(2\mathrm{K}v)} = \sqrt{k'}\,\dfrac{\theta_3(v)}{\theta_1(v)}\,, \\ \sqrt{k} = \dfrac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)}\,,\quad \sqrt{k'} = \dfrac{\theta_1(0)}{\theta_3(0)}\,. \end{cases}$$

Similmente si distinguano fra loro le quattro funzioni $\Theta(v)$, per le quali avranno pure luogo, cambiando k in λ, le ultime relazioni.

Dalle (5) si ottengono :

$$(9)\quad \begin{cases} \theta(v+1) = (-1)^{\nu}\theta(v)\,,\quad \theta(v+\gamma) = (-1)^{q}e^{-i\pi(2v+\gamma)}\,\theta(v) \\ \theta(-v) = (-1)^{\nu q}\theta(v)\,, \end{cases}$$

e tre altre corrispondenti alle $\Theta(v)$, le quali mostrano che i rapporti fra queste ultime funzioni ammettono siccome indici o semiindici di peridiocità le quantità: 1, c e quindi i rapporti fra le $\Theta(sv+b)$ le : $\frac{1}{s}$, $\frac{c}{s}$; perciò volendo che le (2) ossia che i rapporti fra le $\Theta(sv+b)$, ove :

$$(10)\qquad s = a\,\frac{\mathrm{K}}{\Delta}\,,$$

sieno espressi razionalmente colle (3), ossia coi rapporti fra le $\theta(v)$, si dovranno stabilire le relazioni:

$$\gamma = d_1 \frac{c}{s} + l_1 \frac{1}{s}, \quad 1 = d_2 \frac{c}{s} + l_2 \frac{1}{s},$$

nelle quali le d_1, l_1, d_2, l_2 rappresentano numeri interi Da queste si hanno:

$$(11) \begin{cases} \gamma = \frac{s_0}{s}, \quad s_1 = d_2 c + l_2, \quad s_0 = d_1 c + l_1, \\ c = \frac{r_0}{r}, \quad r = -d_2\gamma + d_1, \quad r_0 = l_2\gamma - l_1, \\ s r_0 = nc, \quad sr = n, \quad r s_0 = n\gamma, \end{cases}$$

ove:

$$(12) \qquad n = d_1 l_2 - d_2 l_1 .$$

III. — D'ora innanzi si riterrà $b = 0$; si mostrerà in seguito come dalle formole che si otterranno in tale ipotesi si deducano le altre. Avuto riguardo alle ultime relazioni, si ottengono facilmente le seguenti:

$$(13) \begin{cases} e^{i\pi d_2 s(v+1)^2}\,\Theta(s(v+1)) = (-1)^{\delta}\, e^{i\pi d_2 s v^2}\,\Theta(sv), \\ e^{i\pi d_2 s(v+\gamma)^2}\,\Theta(s(v+\gamma)) = (-1)^{h}\, e^{-i\pi n(2v+\gamma)}\, e^{i\pi d_2 s v^2}\,\Theta(sv), \\ e^{i\pi d_2 s(-v)^2}\,\Theta(-sv) = (-1)^{\mu q}\, e^{i\pi d_2 s v^2}\,\Theta(sv), \end{cases}$$

nelle quali

$$(14) \qquad \delta = pd_2 + \mu l_2 + d_2 l_2, \quad h = pd_1 + \mu l_1 + d_1 l_1 .$$

Ciò posto, avendosi una funzione $\Pi(v)$ definita dalle equazioni, della forma delle (13):

$$(15) \begin{cases} \Pi(v+1) = (-1)^{\delta}\Pi(v), \quad \Pi(v+\gamma) = (-1)^{h}\, e^{-i\pi n(2v+\gamma)}\Pi(v), \\ \Pi(-v) = (-1)^{\tau}\Pi(v), \end{cases}$$

si cerchi il numero delle costanti arbitrarie che ponno entrare nella medesima.

In forza della prima fra queste equazioni la funzione $\Pi(v)$, supponendola di quelle sviluppabili secondo le potenze intere e positive dei loro argomenti in serie sempre convergenti, potrà essere rappresentata con tutta la generalità dalla serie doppiamente infinita [1] :

$$\int A_{2m+\delta}\, e^{i\pi(2m+\delta)v} + \int A_{2m+\delta+1}\, e^{i\pi(2m+\delta+1)v}$$

ossia, per essere nulla la seconda parte in virtù della stessa prima delle (15) e ponendo :

$$A_{2m+\delta} = (-1)^{mh} A_m\, e^{\frac{i\pi}{4n}(2m+\delta)^2 y} \quad ,$$

dalla serie :

$$\int (-1)^{mh} A_m\, e^{i\pi(2m+\delta)v + \frac{i\pi}{4n}(2m+\delta)^2 y} \quad ,$$

A_m essendo un coefficiente indeterminato. Per la seconda però e per la terza delle (15) si hanno le :

(16) $\quad A_{m+n} = (-1)^{(n-1)h} A_m \,,\quad (-1)^{\delta h} A_{m-\delta} = (-1)^{\tau} A_{-m}$

ed anche :

$$(-1)^{\delta h} A_{m-\delta} = (-1)^{\tau+(n-1)h} A_{n-m} \quad ,$$

delle quali la prima mostra che tutti i coefficienti A_m sono esprimibili mediante n tra essi che si ponno ritenere i seguenti :

$$A_0 \,,\ A_1 \,,\ \ldots\ldots\ A_{n-1} \,,$$

la terza somministra fra questi le relazioni :

$(-1)^{\delta h} A_{1-\delta} = (-1)^{\tau} A_{n-1} \,,\qquad (-1)^{\delta h} A_0 = (-1)^{\tau+h} A_{n-\delta} \,,$

$(-1)^{\delta h} A_{2-\delta} = (-1)^{\tau} A_{n-2} \,,$ ovvero $(-1)^{\delta h} A_1 = (-1)^{\tau+h} A_{n-\delta-1}$

. . . .

[1] Wier'trass. Théorie der Abel'schen Functionen. Crelle's J. 52 Band. §. 365.

$$(-1)^{\delta h} A_{\frac{n-1}{2}-\delta} = (-)^{\tau} A_{\frac{n+1}{2}}, \quad (-1)^{\delta h} A_{\frac{n}{2}-\delta} = (-1)^{\tau+h} A_{\frac{n}{2}},$$

secondochè sia n dispari o pari.

Supposto n dispari e $\tau \equiv \delta h$ (mod. 2), il numero dei coefficienti che rimangono indipendenti risulta, qualunque sia δ, eguale ad $\frac{n+1}{2}$.

Supposto n pari e $\delta \equiv 1$ (mod. 2), il numero dei coefficienti indipendenti riducesi ad $\frac{n}{2}$. Se invece, essendo n pari, si suppone $\delta \equiv 0$ (mod. 2), avendosi dalla prima delle relazioni precedenti combinata colla prima delle (16) e dall'ultima:

$$A_0 = (-1)^{\tau} A_0, \quad A_{\frac{n}{2}} = (-1)^{\tau+h} A_{\frac{n}{2}},$$

ne segue che il numero dei cofficienti indipendenti non sarà superiore ad $\frac{n}{2}$, ove non sieno contemporaneamente $\delta \equiv h \equiv 0$ (mod. 2), perchè risulterà allora l'uno o l'altro dei coefficienti A_0, $A_{\frac{n}{2}}$, od anche entrambi, eguale a zero; e sarà invece il detto numero eguale ad $\frac{n}{2}+1$ quando sieno $\delta \equiv h \equiv 0$ (mod. 2). Riassumendo pertanto si conchiude che:

L'espressione più generale della funzione $\Pi(v)$, definita dalle equazioni (15) e della natura supposta, contiene un numero di coefficienti indipendenti eguale ad $\frac{n+1}{2}$ per n dispari e non maggiore di $\frac{n}{2}$ ovvero eguale ad $\frac{n}{2}+1$ per n pari, secondochè non siano ovvero siano contemporaneamente $\delta \equiv h \equiv 0$ (mod. 2).

Si indichino con $\theta_r(v)$, $\theta_s(v)$ due fra le quattro funzioni $\theta(v)$ e con ν_r, q_r, ν_s, q_s i valori corrispondenti delle ν, q e si consideri una funzione omogenea del grado n delle medesime della forma :

$$\Sigma_{a,b}\, B_{a,b}\, \theta^a_r\, \theta^b_s = F(v)\,,$$

a, b essendo numeri intieri sempre pari o dispari la somma dei quali sia eguale ad n. Per essa, osservando le (9), avranno luogo le proprietà .

$$F(v+1) = (-1)^{a\nu_r + b\nu_s}\, F(v)\,, \quad F(v+\gamma) = (-1)^{aq_r + bq_s}$$

$$\times\ e^{-i\pi n(2v+\gamma)} F(v)\,, \quad F(-v) = (-1)^{a\nu_r q_r + b\nu_s q_s}\, F(v)\,,$$

per cui sara definita dalle equazioni (15), ove si ritengano:

$a\nu_r + b\nu_s \equiv \delta$, $aq_r + bq_s \equiv k$, $a\nu_r q_r + b\nu_s q_s \equiv \tau$ (mod. 2),

e siccome la medesima contiene $\frac{n+1}{2}$ coefficienti $B_{a,b}$ indipendenti quando sia n dispari ed $\frac{n}{2}$ ovvero $\frac{n}{2}+1$ quando n sia pari, secondochè non si suppongano ovvero si suppongano contemporaneamente $a \equiv b \equiv 0$ (mod. 2), così la detta funzione $F(v)$, essendo anche della natura supposta alla $\Pi(v)$, potrà assumersi siccome espressione generale di quest'ultima, ove sieno soddisfatte le congruenze superiori.

Ora funzioni della natura della $\Pi(v)$ e similmente definite sono, osservando le (5), (13), le :

$$e^{i\pi d_2 s v^2}\ \Theta(sv)\,;$$

quindi si potrà stabilire la 1ª, 2ª o 3ª delle seguenti eguaglianze :

$$(17)\begin{cases} e^{\frac{i\pi d}{2}sv^2}\,\Theta(sv)=B_0\theta_r^{\,n}+B_1\theta_r^{\,n-2}\theta_s^{\,2}+\ldots+B_{\frac{n-1}{2}}\,\theta_r\theta_s^{\,n-1}, \\ e^{\frac{i\pi d}{2}sv^2}\,\Theta(sv)=B_0\theta_r^{\,n-1}\theta_s+B_1\theta_r^{\,n-3}\theta_s^{\,3}+\ldots+B_{\frac{n}{2}-1}\,\theta_r\theta_s^{\,n-1}, \\ e^{\frac{i\pi d}{2}sv^2}\,\Theta(sv)=B_0\theta_r^{\,n}+B_1\theta_r^{\,n-2}\theta_s^{\,2}+\ldots+B_{\frac{n}{2}}\,\theta_s^{\,n}, \end{cases}$$

secondochè, avuto riguardo alle congruenze superiori, avranno luogo le 1ᵉ, 2ᵉ o 3ᵉ delle

$$(18)\begin{cases} n\equiv1\,,\ pd_2+\mu l_2+d_2l_2\equiv\nu_r,\ pd_1+\mu l_1+d_1l_1\equiv q_r,\ \mu p\equiv\nu_r q_r, \\ n\equiv0\,,\ pd_2+\mu l_2+d_2l_2\equiv\nu_r+\nu_s\,,\ pd_1+\mu l_1+d_1l_1\equiv q_r+q_s\,, \\ \qquad \mu p\equiv\nu_r q_r+\nu_s q_s\,, \\ n\equiv0\,,\ pd_2+\mu l_2+d_2l_2\equiv0\,,\ pd_1+\mu l_1+d_1l_1\equiv0\,,\ \mu p\equiv0\,, \\ \qquad (\mathrm{mod.}\ 2) \end{cases}$$

IV. — Si noti la seguente proprietà delle funzioni Θ. Posto :

$$(19)\begin{cases} g=dc+l\,,\quad f=e^{-i\pi\left(\frac{dl}{4}-p_r\frac{\mu_r-\mu_s+d}{2}-\mu_s\frac{l}{2}\right)}, \\ \mu_r-\mu_s+d\equiv0\,,\ p_r-p_s+l\equiv0\quad(\mathrm{mod.}\ 2)\,, \end{cases}$$

nelle quali d ed l rappresentano interi, dalla seconda delle (5), cambiando la m in $m-\frac{1}{2}(\mu_r-\mu_s+d)$, si ottiene :

$$(20)\qquad \Theta_r\left(v+\frac{g}{2}\right)=fe^{-i\pi d\left(v+\frac{g}{4}\right)}\,\Theta_s(sv)$$

Da questa relazione, ponendo successivamente

$$d=d_1\ ,\quad l=l_1\ ,$$
$$d=d_2\ ,\quad l=l_2\ ,$$
$$d=d_1+d_2\,,\quad l=l_1+l_2\,,$$

osservando le (11) e cambiando la v in sv, si ottengono queste altre:

$$
(21)\left\{\begin{array}{l}
e^{i\pi d_2 s\left(v+\frac{\gamma}{2}\right)^2}\Theta_r\left[s\left(v+\frac{\gamma}{2}\right)\right]=a_{r,s} \\
\times e^{-i\pi n\left(v+\frac{\gamma}{4}\right)}\, e^{i\pi d_2 s v^2}\,\Theta_s(sv)\quad , \\
e^{i\pi d_2 s\left(v+\frac{1}{2}\right)^2}\Theta_r\left[s\left(v+\frac{1}{2}\right)\right]=b_{r,s}\, e^{i\pi d_2 s v^2}\,\Theta_s(sv)\, , \\
e^{i\pi d_2 s\left(v+\frac{\gamma+1}{2}\right)^2}\Theta_r\left[s\left(v+\frac{\gamma+1}{2}\right)\right]=C_{r,s} \\
\times e^{-i\pi n\left(v+\frac{\gamma}{4}\right)}\, e^{i\pi d_2 s v^2}\,\Theta_s(sv).
\end{array}\right.
$$

dove:

$$
(22)\left\{\begin{array}{l}
a_{r,s}=e^{-i\pi\alpha_{r,s}}\ ,\ b_{r,s}=e^{-i\pi\beta_{r,s}}\ ,\ c_{r,s}=e^{-i\pi\gamma_{r,s}}\ , \\
\alpha_{r,s}=\frac{d_1 l_1}{4}-p_r\frac{\mu_r-\mu_s+d_1}{2}-\mu_s\frac{l_1}{2}\, , \\
\beta_{r,s}=\frac{d_2 l_2}{4}-p_r\frac{\mu_r-\mu_s+d_2}{2}-\mu_s\frac{l_2}{2}\, , \\
\gamma_{r,s}=\frac{d_1 l_1+2d_1 l_2+d_2 l_2}{4}-p_r\frac{\mu_r-\mu_s+d_1+d_2}{2}-\mu_s\frac{l_2+l_2}{2}\ ;
\end{array}\right.
$$

fissati gli indici r, le seconde fra le relazioni (19) determinano gl' indici s. Una relazione simile alla (20) ha luogo evidentemente fra le $\theta(v)$; si notino, siccome casi particolari di essa, le seguenti:

$$
(23)\quad \begin{cases}
\theta_r\left(v+\frac{\gamma}{2}\right) = e^{i\pi p_r \frac{\mu_r-\mu_s+1}{2}} \cdot e^{-i\pi\left(v+\frac{\gamma}{4}\right)}\theta_s(v) \,, \\
\theta_r\left(v+\frac{1}{2}\right) = e^{i\pi\left(p_r \frac{\mu_r-\mu_s}{2}+\frac{\mu_s}{2}\right)}\theta_s(v) \,, \\
\theta_r\left(v+\frac{\gamma+1}{2}\right) = e^{-i\pi\left(\frac{1}{2}-p_r \frac{\mu_r-\mu_s+1}{2}-\frac{\mu_s}{2}\right)} e^{-i\pi\left(v+\frac{\gamma}{4}\right)}\theta_s(v),
\end{cases}
$$

alle quali corrispondono ordinatamente le:

$$
(24)\quad \begin{cases}
\mu_r-\mu_s+1\equiv 0 \,, & p_r-p_s \equiv 0 \,, \\
\mu_r-\mu_s \equiv 0 \,, & p_r-p_s+1\equiv 0 \,, \\
\mu_r-\mu_s+1\equiv 0 \,, & p_r-p_s+1\equiv 0 \,,
\end{cases} \qquad (\text{mod. } 2.)
$$

V. — Ciò premesso, la forma da assumersi quale espressione di una funzione $e^{\frac{i\pi d_2 s v^2}{2}}\,\Theta(v)$ e le $\theta(v)$ che debbono entrarvi, dipendendo per le (18) dalla forma pari o dispari dei numeri d_1, l_1, d_2, l_2, si distinguono i vari sistemi di questi numeri stessi. Ora questi essendo legati fra loro dalla relazione (12), nella quale n rappresenta il numero che segna l'ordine della trasformazione, a tale relazione, prendendo a considerare in primo luogo la trasformazione d'ordine pari, si soddisfa, lasciando ad n la massima generalità, coi nove sistemi di numeri seguenti:

$$(25)\left\{\begin{array}{ll} d_1\equiv 1,\ l_1\equiv 1,\ d_2\equiv 1,\ l_2\equiv 1, & \\ d_1\equiv 1,\ l_1\equiv 0,\ d_2\equiv 1,\ l_2\equiv 0, & (1)_r \\ d_1\equiv 0,\ l_1\equiv 1,\ d_2\equiv 0,\ l_2\equiv 1, & \\ & \\ d_1\equiv 0,\ l_1\equiv 0,\ d_2\equiv 1,\ l_2\equiv 1, & \\ d_1\equiv 0,\ l_1\equiv 0,\ d_2\equiv 1,\ l_2\equiv 0,\ (\text{mod.}2) & (2)_r\ (r=1,2,3 \\ d_1\equiv 0,\ l_1\equiv 0,\ d_2\equiv 0,\ l_2\equiv 1, & \\ & \\ d_1\equiv 1,\ l_1\equiv 1,\ d_2\equiv 0,\ l_2\equiv 0, & \\ d_1\equiv 1,\ l_1\equiv 0,\ d_2\equiv 0,\ l_2\equiv 0, & (3)_r \\ d_1\equiv 0,\ l_1\equiv 1,\ d_2\equiv 0,\ l_2\equiv 0, & \end{array}\right.$$

distinti in tre classi $(1)_r$, $(2)_r$, $(3)_r$, nelle quali riescono ordinatamente:

$$(25\tfrac{1}{2})\left\{\begin{array}{ll} md_1-m_0l_1\equiv 1\ ,\quad m_0l_2-md_2\equiv 1\ , & \\ md_1-m_0l_1\equiv 1\ ,\quad m_0l_2-md_2\equiv 0\ , & (\text{mod. } 2) \\ md_1-m_0l_1\equiv 0\ ,\quad m_0l_2-md_2\equiv 1\ , & \end{array}\right.$$

qualora con m, m_0 s'intendano due numeri interi scelti in modo che, nella espressione:

$$mr+m_0r_0=(md_1-m_0l_1)+(m_0l_2-md_2)\gamma\ ,$$

non riescano contemporaneamente pari il coefficiente di γ e il termine che non la contiene:

Per le (21) e (19) si vede che una funzione $e^{\frac{i\pi d_2}{2}sv^2}\Theta(sv)$ si cambia in una delle altre tre, moltiplicata per un fattore della forma:

$$a_{r,s}\,e^{-i\pi n\left(v+\frac{\gamma}{n}\right)}\ \text{ovvero}\ b_{r,s}\ \text{ovvero}\ c_{r,s}\,e^{-i\pi n\left(v+\frac{\gamma}{n}\right)},$$

cambiando in essa la v nei sistemi di numeri d_1, l_1, d_2, l_2 segnati:

$$(1)_r \text{ in } v+\frac{\gamma}{2} \quad \text{ovvero} \quad v+\frac{1}{2},$$

$$(2)_r \text{ » } v+\frac{1}{2} \quad \text{»} \quad v+\frac{\gamma+1}{2},$$

$$(3)_r \text{ » } v+\frac{\gamma+1}{2} \quad \text{»} \quad v+\frac{\gamma}{2};$$

se per brevità si rappresentano cogl' indici 0, 1, 2, 3 le rispettive funzioni $e^{\frac{i\pi d}{2} s v^2}\Theta(sv)$, l'ordine con cui si cambiano le une nelle altre, cambiando la v come si è detto, viene indicato dalla tabella:

(26)

	0	1	2	3	
$(s)_1$	3	2	1	0	
$(s)_2$	1	0	3	2	$(s=1,2,3$.
$(s)_3$	2	3	0	1	

VI. — Si prendano a considerare in special modo i sistemi $(1)_r$ ossia della I^a^ classe. Avendosi in tal caso:

$$p_0 d_2+\mu_0 l_2+d_2 l_2 \equiv 1 \ , \quad p_0 d_1+\mu_0 l_1+d_1 l_1 \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2)$$

ed essendo $\mu_0 p_0 = 1$, dalle seconde delle (18) si ricava:

$$\nu_r = 1 \ , \ q_r = 1 \ ; \quad \nu_s = 0 \ , \ q_s = 0 \ ,$$

o viciversa, quindi:

$$(27) \quad e^{\frac{i\pi d}{2} s v^2}\Theta_0(sv) = a_0\theta_0^{\ n-1}\theta_3 + a_1\theta_0^{\ n-3}\theta_3^{\ 3} + \ldots + a_{\frac{n}{2}-1}\theta_0\theta_3^{\ n-1}.$$

Per determinare i coefficienti a_0, a_1, . . . si osservi che indicando ξ, m m_0 tre numeri interi, per le (11) e per le relazioni fra le Θ analoghe alle (9), si ha:

$$(27\tfrac{1}{2})\qquad \Theta_0\left(s\xi\frac{mr+m_0r_0}{n}\right)=\Theta_0(\xi m+\xi m_0c)=0\,;$$

per cui, ponendo nella (27) ovvero nella :

$$(28)\quad e^{\frac{i\pi d}{2}sv^2}\,\Theta_0(sv)=a_0\theta_3{}^n\frac{\theta_0}{\theta_3}\left(\frac{\theta_0{}^{n-2}}{\theta_3{}^{n-2}}+\frac{a_1}{a_0}\frac{\theta_0{}^{n-4}}{\theta_3{}^{n-4}}+\ldots+\frac{a_{\frac{n}{2}-1}}{a_0}\right)$$

in luogo della v la ξw, dove :

$$(29)\qquad w=\frac{mr+m_0r_0}{n},$$

si ottiene, ove non riesca:

$$\theta_0(\xi w)\;\theta_3(\xi w)=0\,,$$

la seguente equazione :

$$(30)\quad \left[\frac{\theta_0(\xi w)}{\theta_3(\xi w)}\right]^{n-2}+\frac{a_1}{a_0}\left[\frac{\theta_0(\xi w)}{\theta_3(\xi w)}\right]^{n-4}+\ldots+\frac{a_{\frac{n}{2}-1}}{a_0}=0\,,$$

dalla quale se ne ricavano tante fra i rapporti dei coefficienti, quanto sono i valori diversi fra loro e dallo zero e dall'∞ che la funzione :

$$(31)\qquad \left[\frac{\theta_{..}(\xi w)}{\theta_2(\xi w)}\right]^2$$

può assumere attribuendo a ξ tutti i valori numerici interi da $-\infty$ a $+\infty$. Per trovare il numero di questi valori differenti fra loro, si osservi che, indicando con α, β due numeri interi, per le (9) si ha :

$$\left[\frac{\theta_r(v+\alpha+\beta\gamma)}{\theta_s(v+\alpha+\beta\gamma)}\right]^2=\left[\frac{\theta_r(v)}{\theta_s(v)}\right]^2,$$

dalla quale, ponendo : .

$$\alpha+\beta\gamma=nw=mr+m_0r_0$$

e cambiando la v in $-v$, si ottiene la :

$$(32) \qquad \left[\frac{\theta_r(nw-v)}{\theta_s(nw-v)}\right]^2 = \left[\frac{\theta_r(v)}{\theta_s(v)}\right]^2 .$$

Questa equazione mostra che i valori di ξ, ai quali corrispondono valori differenti fra loro della funzione (31), sono gli $\frac{n}{2}+1$ seguenti ;

$$0,\ 1,\ 2,\ldots \frac{n}{2},$$

qualora non si possa supporre $\alpha+\beta\gamma$ eguale al prodotto di w per un numero intero minore di n, cioè qualora n, il coefficiente di γ e il termine che non la contiene nella espressione nw non ammettano fattore comune. Siccome poi degli anzidetti $\frac{n}{2}+1$ valori di ξ il primo annulla la funzione $\theta_0(\xi w)$, e l'ultimo, per la forma della w :

$$(33) \qquad w=\frac{2h+1+(2h'+1)\gamma}{n},$$

dove h, h' rappresentano numeri interi, il che risulta dalle (29) e (25½), e per la terza delle (23) annulla la $\theta_3(\xi w)$, così si attribuiranno a ξ nella (32) i rimanenti $\frac{n}{2}-1$ valori ; quindi, i valori corrispondenti della (31) potendosi considerare quali radici della equazione :

$$z^{\frac{n}{2}-1}+\frac{a_1}{a_0}z^{\frac{n}{2}-2}+\ldots+\frac{a_{\frac{n}{2}-1}}{a_0},$$

la (28) potrà porsi sotto la forma :

$$e^{\frac{i\pi d}{2}sv^2}\,\Theta_0(sv)=a_0\theta^n{}_3\,\frac{\theta_0}{\theta_3}\left[\frac{\theta_0^2}{\theta_3^2}-\frac{\theta_0^2(w)}{\theta_3^2(w)}\right]\left[\frac{\theta_0^2}{\theta_3^2}-\frac{\theta_0^2(2w)}{\theta_3^2(2w)}\right]\ldots$$

$$\times\left\{\frac{\theta_0^2}{\theta_3^2}-\frac{\theta_0^2\left(\frac{n-2}{2}w\right)}{\theta_3^2\left(\frac{n-2}{2}w\right)}\right\}$$

ovvero anche:

$$(34)\quad \begin{cases} e^{\frac{i\pi d_2 sv^2}{2}}\,\Theta_0(sv) = a_0\theta_1{}^n \dfrac{\theta_0}{\theta_1}\dfrac{\theta_3}{\theta_1}\left[\dfrac{\theta_0{}^2}{\theta_1{}^2} - \dfrac{\theta_3{}^2}{\theta_1{}^2}\dfrac{\theta_0{}^2(w)}{\theta_3{}^2(w)}\right]\ldots \\ \times\left\{\dfrac{\theta_0{}^2}{\theta_1{}^2} - \dfrac{\theta_3{}^2}{\theta^2{}_1}\dfrac{\theta_0{}^2\left(\frac{n-2}{2}w\right)}{\theta_3{}^2\left(\frac{n-2}{2}w\right)}\right\}, \end{cases}$$

VII. — Prendendo ora a considerare in particolar modo uno dei sistemi della 1.ª classe, per esempio quello segnato $(1)_1$, se nella (27) ovvero nella precedente equazione si cambia la v in $v + \frac{\gamma}{2}$ e si osservano le (23) e (26), si ottiene la:

$$(35)\quad \begin{cases} a_{0,3}\, e^{\frac{-i\pi d_2 sv^2}{2}}\,\Theta_3(sv) = -\, a_0\theta^n{}_1 \left[1 - \dfrac{\theta_2{}^2}{\theta_1{}^2}\dfrac{\theta_0{}^2(w)}{\theta_3{}^2(w)}\right]\ldots \\ \times\left\{1 - \dfrac{\theta_2{}^2}{\theta_1{}^2}\cdot\dfrac{\theta_0{}^2\left(\frac{n-2}{2}w\right)}{\theta_3{}^2\left(\frac{n-2}{2}w\right)}\right\} \end{cases}$$

Per le altre due funzioni $e^{\frac{i\pi d_2 sv^2}{2}}\,\Theta(sv)$ si osservi che, nel sistema $(1)_1$, si hanno:

$$p_1d_2 + \mu_1 l_2 + d_2 l_2 \equiv 0,\; p_1 d_1 + \mu_1 l_1 + d_1 l_1 \equiv 0,\qquad \mu_1 p_1 \equiv 0,$$
$$(\text{mod.}\,2)\ \text{e}$$
$$p_2 d_2 + \mu_2 l_2 + d_2 l_2 \equiv 0,\; p_2 d_1 + \mu_2 l_1 + d_1 l_1 \equiv 0,\qquad \mu_2 p_2 \equiv 0$$

per cui le medesime si ponno esprimere mediante la terza delle (17), θ_r e θ_s essendo due qualsivogliano fra le θ. Si ponga:

$$(36)\quad e^{\frac{i\pi d_2 sv^2}{2}}\,\Theta_1(sv) = b_0\theta_0{}^n + b_1\theta_0{}^{n-2}\theta^2{}_1 + \ldots + b_{\frac{n}{2}}\,\theta_1{}^n\,;$$

da questa cambiando la v in $v + \frac{\gamma}{2}$, si ottiene :

$$(36\tfrac{1}{2})\quad a_{1,2}\, e^{i\pi d_2 s v^2}\,\Theta_2(sv) = b_0\theta_1^{\,n} + b_1\theta_1^{\,n-2}\theta_0^{\,2} + \ldots + b_{\frac{n}{2}}\theta_0^{\,n}.$$

Per determinare i coefficienti b_0, b_1, . . . mediante la prima delle due ultime equazioni si osservi che, per le relazioni analoghe alle (23) fra le Θ si ha :

$$\Theta_1\left(v - \frac{c}{2}\right) = - e^{i\pi\left(v - \frac{c}{4}\right)}\,\Theta_0(v)\,,$$

dalla quale ponendo per c il valore $\frac{sr_0}{n}$ dato dalle (11) ed in luogo della v la quantità :

$$s\,\frac{tr + t_0 r_0}{n}\,,$$

t, t_0 essendo numeri interi, e rammentando la (27½), si ottiene :

$$\Theta_1\left(s\,\frac{tr + (t_0 - \frac{1}{2})r_0}{n}\right) = 0\,,$$

ed anche, ponendo

$$t = \rho(2\xi - 1)\,,\quad t_0 - \tfrac{1}{2} = (\rho_0 + \tfrac{1}{2})(2\xi - 1)\,,$$

ρ_1 ρ_0 e ξ rappresentano numeri interi, la seguente :

$$\Theta_1\left[s\left(\xi - \frac{1}{2}\right)\frac{2r\rho + (2\rho_0 + 1)r_0}{n}\right] = 0\,.$$

Dei numeri m, m_0, che entrano nella (29), il primo si ritenga pari il secondo dispari ovvero si supponga :

$$(37)\qquad w = \frac{2\rho r + (2\rho_0 + 1)r_0}{n} = 0\,.$$

i coefficienti nelle (34), (35), (36) e (36½) verrano cosi ad essere espressi per funzioni ellittiche di argomenti mul-

tipli di un solo. Ponendo pertanto $(\xi-\frac{1}{2})w$ in luogo dalla v nella (36), si ottiene:

$$\left\{\frac{\theta_0\left[\left(\xi-\frac{1}{2}\right)w\right]}{\theta_1\left[\left(\xi-\frac{1}{2}\right)w\right]}\right\}^n+\frac{b_1}{b_0}\left\{\frac{\theta_0\left[\left(\xi-\frac{1}{2}\right)w\right]}{\theta_1\left[\left(\xi-\frac{1}{2}\right)w\right]}\right\}^{n-2}+\ldots+\frac{b_{\frac{n}{2}}}{b_0}=0,$$

nella quale, osservando la (32), si attribuiranno a ξ i valori $1,2,\ldots\frac{n}{2}$ e quindi le (36), (36½) si potranno porre sotto la forma;

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &e^{i\pi d_2 sv^2}\,\Theta_1(sv)=b_0\theta^n{}_1\left\{\frac{\theta^2{}_0}{\theta^2{}_1}-\frac{\theta^2{}_0\left(\frac{w}{2}\right)}{\theta^2{}_1\left(\frac{w}{2}\right)}\right\}\left\{\frac{\theta^2{}_0}{\theta^2{}_1}-\frac{\theta^2{}_0\left(\frac{3w}{2}\right)}{\theta^2{}_1\left(\frac{3w}{2}\right)}\right\}\ldots\\ &\qquad\times\left\{\frac{\theta^2{}_0}{\theta^2{}_1}-\frac{\theta^2{}_0\left(\frac{n-1}{2}w\right)}{\theta^2{}_1\left(\frac{n-1}{2}w\right)}\right\}, \end{aligned}\right.$$

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &a_{1,2}e^{i\pi d_2 s_v^2}\,\Theta_2(sv)=b_0\theta^n{}_1\left\{1-\frac{\theta^2{}_0}{\theta^2{}_1}\frac{\theta^2{}_0\left(\frac{w}{2}\right)}{\theta^2{}_1\left(\frac{w}{2}\right)}\right\}\ldots\\ &\qquad\times\left\{1-\frac{\theta^2{}_1}{\theta^2{}_1}\frac{\theta^2{}_0\left(\frac{n-1}{2}w\right)}{\theta^2{}_1\left(\frac{n-1}{2}w\right)}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Ora le (8), (4) e (10), ponendo:

$$(40)\qquad u=2\mathrm{K}v,\quad \frac{1}{\mathrm{M}}=\frac{\Delta}{\mathrm{K}}s,$$

Somministrano :

$$(41)\quad\begin{cases}\dfrac{\theta_0(v)}{\theta_1(v)}=i\sqrt{k}\ \mathrm{sen}am(u,k)=i\sqrt{(k.x)}\ ;\\[2ex] \dfrac{\theta_2(v)}{\theta_1(v)}=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}}\sqrt{(1-x^2)},\ \dfrac{\theta_3(v)}{\theta_1(v)}=\dfrac{1}{\sqrt{k'}}\sqrt{(1-k^2x^2)},\\[2ex] \dfrac{\Theta_0(sv)}{\Theta_1(sv)}=i\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}am\left(\dfrac{u}{\mathrm{M}},\ \lambda\right)=i\sqrt{\lambda}.y\ ,\\[2ex] \dfrac{\Theta_2(sv)}{\Theta_1(sv)}=\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}}\sqrt{(1-y^2)}\ ,\quad \dfrac{\Theta_3(sv)}{\Theta_1(sv)}=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda'}}\ \sqrt{(1-\lambda^2y^2)};\end{cases}$$

per cui, ponendo, avuto riguardo alle (33), (6):

$$(42)\qquad \omega=\mathrm{K}w=\frac{(2h+1)\mathrm{K}+(2h'+1)i\mathrm{K}'}{n}$$

e ponendo inoltre :

$$(43)\quad\begin{cases}\varphi_{0,\alpha}=x\sqrt{(1-k^2x^2)}\left(1-\dfrac{x^2}{s^2_2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{s^2_4}\right)\dots\left(1-\dfrac{x^2}{s^2_{n-2}}\right),\\[2ex] \varphi_{1,\alpha}=\sqrt{(1-x^2)}(1-k^2x^2s^2_2)(1-k^2x^2s^2_4)\dots(1-k^2x^2s^2_{n-2})\ ,\\[2ex] \varphi_{2,\alpha}=\left(1-\dfrac{x^2}{s_1^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{s^2_3}\right)\dots\left(1-\dfrac{x^2}{s^2_{n-1}}\right),\\[2ex] \varphi_{3,\alpha}=(1-k^2x^2s^2_1)(1-k^2x^2s^2_3)\dots(1-k^2x^2s^2_{n-1})\ ,\end{cases}$$

dove, per brevità:

$$(44)\quad\begin{cases}s_m=\mathrm{sen}am(m\omega,k)\ \text{ ed anche :}\\ c_m=\mathrm{cos}am(m\omega,k)\ ,\\ \Delta_m=\Delta am(m\omega,k)\ ,\\ tg_m=\mathrm{tang}am(m\omega,k)\ ,\\ \sigma_m=\mathrm{senco}am(m\omega,k)\ ,\end{cases}$$

le equazioni (34), (39), (35) divise per la (38) ed osservate le (8, danno le seguenti:

$$(45)\quad \begin{cases} i\sqrt{\lambda}.y = \dfrac{a_0}{b_0}\dfrac{i}{\sqrt{kk'}}\dfrac{[s_2 s_4 \ldots s_{n-1}}{[\Delta_2\Delta_4 \ldots \Delta_{n-2}]^2[s_1 s_3 \ldots s_{n-1}]^2}\dfrac{\varphi_{0.\alpha}}{\varphi_{2,\alpha}}, \\ a_{1,2}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}}\sqrt{(1-y^2)} = \dfrac{1}{k^{\frac{n}{2}}[s_1 \ldots s_{n-1}]^2}\dfrac{\varphi_{3,\alpha}}{\varphi_{2,\alpha}}, \\ a_{0,3}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda'}}\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)} = -\dfrac{a_0}{b_0}\dfrac{1}{k^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{k'}}\dfrac{1}{[\Delta_2 \ldots \Delta_{n-2}]^2[s_1 \ldots s_{n-1}]^2} \\ \qquad\qquad \times\dfrac{\varphi_{1,\alpha}}{\varphi_{2,\alpha}}. \end{cases}$$

Nelle due ultime fra queste tre equazioni, ponendo $x=0$ e quindi per la prima $y=0$, si hanno:

$$(46)\quad \begin{cases} a_{1,2}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}} = \dfrac{1}{k^{\frac{n}{2}}[s_1 \ldots s_{n-1}]^2}, \\ a_{0,3}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda'}} = -\dfrac{a_0}{b_0}\dfrac{1}{k^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{k'}}\dfrac{1}{[\Delta_2 \ldots \Delta_{n-1}]^2[s_1 \ldots s_{n-1}]^2} \end{cases}$$

e, dalla prima delle medesime, si ha:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{a_0}{b_0}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{1}{\sqrt{(kk')}}\frac{[s_2 \ldots s_{n-2}]^2}{[\Delta_2 \ldots \Delta_{n-2}]^2[s_1 \ldots s_{n-1}]^2},$$

ma, per le (1), (10) e (40), risulta:

$$(47)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = a = \frac{1}{M},$$

dunque:

$$(48)\quad \frac{1}{M} = \frac{a_0}{b_0}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{1}{\sqrt{(kk')}}\frac{[s_2 \,.\,.\,.\, s_{n-2}]^2}{[\Delta_2 \,.\,.\,.\, \Delta_{n-2}]^2[s_1 \,.\,.\,.\, s_{n-1}]^2}$$

Per questa equazione e per le (46), le (45) divengono:

$$(49)\quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{M}\dfrac{\varphi_{0,\alpha}}{\varphi_{2,\alpha}}, \\ \sqrt{(1-y^2)} = \dfrac{\varphi_{3,\alpha}}{\varphi_{2,\alpha}}, \\ \sqrt{(1-\lambda^2 y^2)} = \dfrac{\varphi_{1,\alpha}}{\varphi_{2,\alpha}}, \end{cases}$$

inoltre si hanno, per la prima delle (46):

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{(1+a^4_{1,2}q^4_\alpha)}}, \quad \lambda' = \pm a^2_{1,2}\frac{q^2_\alpha}{\sqrt{(1+a^4_{1,2}q^4_\alpha)}},$$

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{1}{a^2_{1,2}q^2_\alpha},$$

e per la seconda delle medesime e la (48) e le prime due di queste ultime tre:

$$\frac{1}{M} = -\frac{a_{0,3}}{a_{1,2}}\frac{p_\alpha}{q_\alpha}\sqrt{(1+a^4_{1,2}q^4_\alpha)},$$

dove si è posto:

$$(50)\quad \begin{cases} p_\alpha = k^{\frac{n}{2}-1}[s_2 s_4 \,.\,.\,.\, s_{n-2}]^2, \\ q_\alpha = k^{\frac{n}{2}}[s_1 s_3 \,.\,.\,.\, s_{n-1}]^2 \text{ e si riterrà} \\ \tau^4_\alpha = 1 - q^4_\alpha \,. \end{cases}$$

I valori precedenti di λ, ... $\frac{1}{M}$, osservando che nel sistema $(1)_1$, per le (22), (25), si hanno:

$$a^2_{1,2} = \pm i \ , \quad a^4_{1,2} = -1 \ , \quad \frac{a_{0,3}}{a_{1,2}} = \pm i \ ,$$

Si ponno scrivere come segue:

$$(51) \quad \lambda = \pm \frac{1}{\tau^2_\alpha} \ , \ \lambda' = \pm i \frac{q^2_\alpha}{\tau^2_\alpha} \ , \quad i \frac{\lambda}{\lambda'} = \pm \frac{1}{q^2_\alpha} \ , \ \frac{1}{M} = \pm i \frac{p_\alpha}{q_\alpha} \tau^2_\alpha \ .$$

I coefficienti b_0, b_1, ... nelle (36), (36½) si ponno anche determinare mediante quest'ultima osservando che :

$$\Theta_2(v - \tfrac{1}{2}) = i\Theta_0(v)$$

e quindi, analogamente a quello che si è già fatto, che :

$$\Theta_2\left[s\left(\xi - \frac{1}{2}\right)\frac{(2\rho + 1)r + 2\rho_0 r_0}{n}\right] = 0 \ ,$$

per cui ritenendo nella (29) m dispari ed m_0 pari e conservando le denominazioni (43), (44), (50) e (42), ω non cambiando di forma rispetto ai coefficienti di k, $i\,k'$, si trovano queste altre formole per la trasformazione :

$$y = \frac{1}{M}\frac{\varphi_{0,\alpha}}{\varphi_{3,\alpha}} \ , \quad \sqrt{(1 - y^2)} = \frac{\varphi_{2,\alpha}}{\varphi_{3,\alpha}} \ , \quad \sqrt{(1 - \lambda^2 y^2)} = \frac{\varphi_{1,\alpha}}{\varphi_{3,\alpha}} \ ,$$

$$\lambda = \pm i \frac{q^2_\alpha}{\tau^2_\alpha} \ , \quad \lambda' = \pm \frac{1}{\tau^2_\alpha} \ , \quad i \frac{\lambda}{\lambda'} = \pm q^2_\alpha \ , \quad \frac{1}{M} = \pm \frac{p_\alpha}{q_\alpha} \tau^2_\alpha \ .$$

VIII. — Considerando gli altri due sistemi di numeri $(1)_2$, $(1)_3$, ottengonsi immediatamente altri quattro sistemi di formole di trasformazione; osservando, se vuolsi, che, passando da un sistema di numeri d_1, l_1, ... ad un altro della medesima classe, non varia, nelle (35), (36) e (37), ovvero (38), (39), se non l'ordine con cui sono disposte le funzioni $e^{\frac{i\pi d}{2} s v^2} \Theta(sv)$ ed i fattori $a_{r,s}$, $b_{r,s}$, $c_{r,s}$, che insieme alle medesime ne costituiscono i primi membri, e l'ordine secondo il quale le funzioni suddette, come anche i fattori $a_{r,s}$, . . . cambiansi le une nelle altre, viene rappresentato dalla (26).

IX. — Prendendo a considerare i sistemi $(2)_r$, $(3)_r$, della 2ª, 3ª classe, trovansi per ciascuna sei sistemi di formole di trasformazione.

Posto:

$$(52)\quad\left\{\begin{array}{l}
\varphi_{0,\beta} = x\left(1 - \frac{x^2}{s_2^{\,2}}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{s^2_{n-2}}\right),\\[2ex]
\varphi_{1,\beta} = \sqrt{(1-x^2)}\,\sqrt{(1-k^2x^2)}\left(1 - \frac{x^2}{\sigma_2^{\,2}}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2_{n-2}}\right),\\[2ex]
\varphi_{2,\beta} = \left(1 - \frac{x^2}{s_1^{\,2}}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{s^2_{n-1}}\right),\\[2ex]
\varphi_{3,\beta} = \left(1 - \frac{x^2}{\sigma_1^{\,2}}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2_{n-1}}\right).\\[2ex]
p_\beta = ik'^{\frac{n}{2}}\,[tg_2\ldots tg_{n-2}]^2,\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \tau^4_\beta = 1 - q^4_\beta,\\
q_\beta = k'^{\frac{n}{2}}\,[tg_1\ldots tg_{n-1}]^2,\\[2ex]
\omega = \frac{2hK + (2h'+1)iK'}{n},
\end{array}\right.$$

h, h' essendo numeri interi, un sistema di formole di trasformazione, corrispondente al sistema di numeri $(2)_2$, è il seguente:

$$y = \frac{1}{M}\frac{\varphi_{0,\beta}}{\varphi_{1,\beta}},\quad \sqrt{(1-y^2)} = \frac{\varphi_{2,\beta}}{\varphi_{1,\beta}},\quad \sqrt{(1-\lambda^2y^2)} = \frac{\varphi_{3,\beta}}{\varphi_{1,\beta}},$$

$$\sqrt{\lambda} = b_{2,3}\,(-1)^{\frac{n}{2}}\,q_\beta,\quad \frac{1}{M} = \frac{b_{0,1}}{b_{2,3}}\frac{p_\beta}{q_\beta},$$

ossia, per essere in questo caso:

$$b^2_{2,3} = \pm 1\,, \quad \frac{b_{0,1}}{b_{2,3}} = \pm 1\,,$$

si ha :

$$\lambda = \pm q^2{}_\beta, \quad \frac{1}{M} = \pm \frac{p_\beta}{q_\beta}\,,$$

Così pure, posto :

$$(53)\left\{\begin{array}{l}
\varphi_{0,\gamma} = x\sqrt{(1-x^2)}\left(1-\frac{x^2}{s^2{}_2}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{x^2}{s^2{}_{n-2}}\right), \\
\varphi_{1,\gamma} = \sqrt{(1-k^2x^2)}\,(1-k^2x^2s^2{}_2)\ \ldots\ (1-k^2x^2s^2{}_{n-2})\,, \\
\varphi_{2,\gamma} = \left(1-\frac{x^2}{s^2{}_1}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{x^2}{s^2{}_{n-1}}\right), \\
\varphi_{3,\gamma} = (1-k^2x^2s^2{}_1)\ \ldots\ (1-k^2x^2s^2{}_{n-1})\,, \\
p_\gamma = k^{\frac{n}{2}}\,[s_2\ \ldots\ s_{n-2}]^2\,, \\
q_\gamma = k^{\frac{n}{2}}\,[s_1\ \ldots\ s_{n-1}]\,, \qquad \tau^4{}_\beta = 1 - q^4{}_\gamma\,, \\
\omega = \frac{(2h+1)K+2h'iK'}{n}\,,
\end{array}\right.$$

un sistema di formole di trasformazione, corrispondente al sistema $(3)_3$, viene dato dalle :

$$y = \frac{1}{M}\frac{\varphi_{0,\gamma}}{\varphi_{2,\gamma}}, \quad \sqrt{(1-y^2)} = \frac{\varphi_{1,\gamma}}{\varphi_{2,\gamma}}, \quad \sqrt{(1-\lambda^2y^2)} = \frac{\varphi_{3,\gamma}}{\varphi_{2,\gamma}},$$

$$\sqrt{\lambda'} = a_{1,3}q_\gamma\,, \quad \frac{1}{M} = -\frac{a_{0,2}}{a_{1,3}}\frac{p_\gamma}{q_\gamma}\,,$$

ed anche :

$$\lambda' = \pm q^2{}_\gamma\,, \quad \frac{1}{M} = \pm i\,\frac{p_\gamma}{q_\gamma}\,.$$

X. — Dalle (23) si ottiene facilmente la notissima relazione:

$$(54)\qquad \operatorname{sen}am(u+iK',\ k)=\frac{1}{k\operatorname{sen}am(u,k)}$$

nel primo membro della quale cambiando la u in

$$u+n\omega-K-iK'$$

supposto che ω abbia la forma (42) e cambiando poscia ancora la u in $K-u$ si ottiene:

$$(54\tfrac{1}{2})\qquad \operatorname{sen}am(n\omega-u)=\pm\frac{1}{k\operatorname{senco}amu}.$$

Se ω si suppone della forma (52) allora, cambiata nel primo membro della (54) la u in $n\omega-iK'-u$, si ha:

$$\left(54\tfrac{3}{4}\right)\qquad \operatorname{sen}am(n\omega-u)=\pm\frac{1}{k\operatorname{sen}amu}.$$

Se finalmente ω avesse la forma (53) allora, dalla:

$$\operatorname{sen}am(K-u)=\operatorname{senco}amu,$$

si otterrebbe:

$$\operatorname{sen}am(n\omega-u)=\pm\operatorname{senco}amu.$$

Mediante queste tre relazioni, ponendo successivamente in luogo della u le: 2ω, 4ω, ... $(n-2)\omega$; ω, 3ω, ... $(n-1)\omega$, si ponno presentare sotto altra forma i coefficienti nelle funzioni φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, e le quantità q, p; funzioni e quantità definite dalle (43) e (50) ovvero (52) ovvero (53), secondochè si considerano come appartenenti alla 1ª o 2ª o 3ª classe. Se si indicano con h_r, k_r, $(r=1,2,3)$, i sei sistemi di formole di trasformazione corrispondenti per ciascuna classe ordinatamente ai sistemi di numeri $(r)_1$, $(r)_2$, $(r)_3$, la funzione y ed il modulo λ per quei sistemi vengono espressi ordinatamente come segue:

$$(55)\quad\begin{cases} y=\pm i\dfrac{p}{q}\tau^2\dfrac{\varphi_0}{\varphi_2}, & \lambda=\pm\dfrac{1}{\tau^2}, \\ y=\pm \dfrac{p}{q}\tau^2\dfrac{\varphi_0}{\varphi_3}, & \lambda=\pm i\dfrac{q^2}{\tau^2}, \\ y=\pm \dfrac{p}{q}\dfrac{\varphi_0}{\varphi_1}, & \lambda=\pm q^2, \\ y=\pm pq\dfrac{\varphi_0}{\varphi_1}, & \lambda=\pm\dfrac{1}{q^2}, \\ y=\pm i\dfrac{p}{q}\dfrac{\varphi_0}{\varphi_2}, & \lambda=\pm\tau^2, \\ y=\pm ipq\dfrac{\varphi_0}{\varphi_3}, & \lambda=\pm i\dfrac{\tau^2}{q^2}, \end{cases}$$

Le funzioni $\sqrt{(1-y^2)}$, $\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)}$ vengono pure espresse da rapporti fra le φ, senza fattori costanti, perchè riduconsi all'unità per $x=0$.

La forma della w, (29), rispetto alle r, r_0, secondo i varj sistemi, viene rappresentata dalla:

$$(56)\quad\begin{cases} k_2,\ k_3,\ w=\dfrac{(2m+1)r+(2m_0+1)r_0}{n}, \\ h_3,\ h_1,\ w=\dfrac{2mr+(2m_0+1)r_0}{n}, \\ k_1,\ h_2,\ w=\dfrac{(2m+1)r+2m_0r_0}{n}. \end{cases}$$

la forma della $\omega=Kw$, rispetto alla γ, non cambia, come si è detto, se non passando da una ad altra classe.

XI. — Si tratti ora del caso in cui non sia la b, cioè la costante introdotta dall'integrazione della (1), nulla.

Per determinare la forma della b, si osservi che, avendo

riguardo, siccome espressioni dei rapporti fra le $\Theta(sv+b)$, soltanto a quelle funzioni dei rapporti $\frac{\theta_0}{\theta_1}$, $\frac{\theta_2}{\theta_1}$, $\frac{\theta_3}{\theta_1}$ nelle quali, come in quelle finora presentatesi, i due ultimi rapporti, ossia le $\sqrt{(1-x^2)}$, $\sqrt{(1-k^2x^2)}$, non entrano linearmente se non come fattori delle medesime, cioè alle funzioni della forma:

$$\left[\frac{\theta_2(v)}{\theta_1(v)}\right]^\alpha\left[\frac{\theta_3(v)}{\theta_1(v)}\right]^\beta F\left[\frac{\theta_0(v)}{\theta_1(v)}, \frac{\theta_2^2(v)}{\theta_1^2(v)}, \frac{\theta_3^2(v)}{\theta_1^2(v)}\right],$$

dove F è simbolo di funzione razionale ed α e β tengono luogo dello zero o dell'unità, tali funzioni non ponno cambiare che di segno, cambiando la v in $1-v$, ciò che è chiaro per le (9); laonde b deve essere tale che:

$$\frac{\Theta_r(sv+b)}{\Theta_s(sv+b)} = \pm \frac{\Theta_r[s(1-v)+b]}{\Theta_s[s(1-v)+b]}$$

ovvero:

$$\frac{\Theta_r\left[s\left(v+\frac{b}{s}\right)\right]}{\Theta_s\left[s\left(v+\frac{b}{s}\right)\right]} = \pm \frac{\Theta_r\left[s\left(v-1-\frac{b}{s}\right)\right]}{\Theta_s\left[s\left(v-1-\frac{b}{s}\right)\right]}$$

ovvero anche, cambiando la v in $v+1+\frac{b}{s}$

$$(57) \qquad \frac{\Theta_r\left[s\left(v+1+2\,\frac{b}{s}\right)\right]}{\Theta_s\left[s\left(v+1+2\,\frac{b}{s}\right)\right]} = \pm \frac{\Theta_r(sv)}{\Theta_s s(v)},$$

la quale esprime che la quantità $1+2\,\frac{b}{s}$ dev' essere una somma di multipli interi degl'indici o semiindici di periodicità delle funzioni:

$$\frac{\Theta_r(sv)}{\Theta_s(sv)}.$$

Ciò posto, si rifletta che le funzioni $e^{i\pi d_2 s v^2}\Theta(sv)$, avuto riguardo ai vari sistemi di numeri d_1, l_1, d_2, l_2, non cambiansi sempre in altre cambiando la v in $v+\frac{\gamma}{2}$, $v+\frac{1}{2}$, $v+\frac{\gamma+1}{2}$; ma rimangono le stesse, cambiando ordinatamente nei sistemi delle classi 1ª, 2ª, 3ª, la v in

$$v+\frac{\gamma+1}{2},\quad v+\frac{\gamma}{2},\quad v+\frac{1}{2};$$

perchè ordinatamente si hanno le:

$$(58)\quad \begin{cases} d_1+d_2\equiv 0, & l_1+l_2\equiv 0, \\ d_1\equiv 0, & l_1\equiv 0, \\ d_2\equiv 0, & l_2\equiv 0, \end{cases}\quad (\text{mod. } 2).$$

Per trovare la più grande potenza intera e positiva del numero 2 per la quale, aumentando la v nelle funzioni $e^{i\pi d_2 s v^2}\Theta(sv)$ ordinatamente nelle classi 1ª, 2ª, 3ª delle quantità $\gamma+1$, γ, 1, divise per 2 elevato a quella potenza, le funzioni suddette non cambiansi peranco in altre, si ponga n sotto la forma:

$$(59)\qquad n=(2m+1)2^{\alpha},$$

m ed α essendo numeri interi positivi, e si indichino con ε', ε due numeri eguali ordinatamente nelle classi nominate a:

$$\varepsilon'=1,\quad \varepsilon=1,$$
$$\varepsilon'=1,\quad \varepsilon=0,$$
$$\varepsilon'=0,\quad \varepsilon=1;$$

le (58) equivalgono alle:

$$\varepsilon' d_1+\varepsilon d_2\equiv 0,\quad \varepsilon' l_1+\varepsilon l_2\equiv 0,\qquad (\text{mod. } 2).$$

Si pònga:

$$(60)\qquad \begin{cases} \varepsilon' d_1 + \varepsilon\, d_2 = (2d_3 + \delta)2^\alpha\,, \\ \varepsilon' l_1 + \varepsilon l_2 = (2l_3 + \lambda)2^\alpha\,, \end{cases}$$

d_3, l_3, δ, λ essendo numeri interi, dei quali i due ultimi dispari. Col mezzo di queste due relazioni, eliminando dalla espressione (12) di n due fra i quattro numeri d_1, l_1, d_2, l_2 che saranno necessariamente, i due primi per la classe 2ª i due ultimi per la 3ª, si ottiene:

$$n = \pm [2(d_r l_3 - d_3 l_r) + d_r\lambda - \delta l_r]2^\alpha\,,$$

la quale coincide colla (59), ponendo:

$$(61)\qquad d_r\lambda - \delta l_r \equiv 1 \quad . \text{ (mod. 2)}.$$

Ora dalle relazioni fra le Θ analoghe alle (9), si ha:

$$\Theta(v + dc + l) = (-1)^{pd+\mu l} e^{-i\pi(2dv+d^2c)}\,\Theta(v)\,,$$

d ed l rappresentando numeri interi, dalla quale, se si cambia la v in sv e si pone:

$$(62)\qquad d = \frac{1}{2^\alpha}(\varepsilon' d_1 + \varepsilon d_2)\,,\qquad l = \frac{1}{2^\alpha}(\varepsilon' l_1 + \varepsilon l_2),$$

per cui, osservate le (11), risulta:

$$(63)\qquad dc + l = \frac{s}{2^\alpha}(\varepsilon'\gamma + \varepsilon)$$

si ottiene:

$$(64)\qquad \frac{\Theta_r\left[s\left(v + \frac{\varepsilon'\gamma + \varepsilon}{2^\alpha}\right)\right]}{\Theta_s\left[s\left(v + \frac{\varepsilon'\gamma + \varepsilon}{2^\alpha}\right)\right]} = \pm\frac{\Theta_r(sv)}{\Theta_s(sv)}\,.$$

Inoltre, richiamando il teorema espresso dalle (19), (20) e ritenendo d, l determinate dalle (62), si ha:

$$(65) \qquad \frac{\Theta_r\left[s\left(v+\frac{\varepsilon'\gamma+\varepsilon}{2^{\alpha+1}}\right)\right]}{\Theta_s\left[s\left(v+\frac{\varepsilon'\gamma+\varepsilon}{2^{\alpha+1}}\right)\right]}=\frac{f_{r,r1}}{f_{s,s1}}\frac{\Theta_{r1}(sv)}{\Theta_{s1}(sv)}$$

le seconde due delle (19) per le (62) e (60), somministrano:

$$(66) \quad \begin{cases} \mu_r-\mu_{r1}+\delta\equiv 0\,, & p_r-p_{r1}+\lambda\equiv 0\,, \\ \mu_s-\mu_{s1}+\delta\equiv 0\,, & p_s-p_{s1}+\lambda\equiv 0\,, \end{cases} \qquad (\text{mod. } 2)$$

e siccome, per la (61), δ e λ non ponno essere pari contemporaneamente, così non potranno essere gl'indici r_1, s_1 eguali rispettivamente agl'indici r, s.

Richiamata pertanto la (57) ed osservate le (13) e (21), (64) e (65), si ricava dover essere:

$$2\frac{b}{s}+1=\xi'\gamma+\xi+\rho\,\frac{\varepsilon'\gamma+\varepsilon}{2^\alpha}\;.$$

ξ', ξ e ρ rappresentando numeri interi. Si ottiene dunque, ponendo $\xi+1$ in luogo di ξ, per b la seguente espressione:

$$(67) \qquad \frac{b}{s}=\xi'\frac{r}{2}+\xi\frac{1}{2}+\rho\,\frac{\varepsilon'\gamma+\varepsilon}{2^\alpha}\;.$$

XII. — Avendo b tale forma, la questione, di trovare le funzioni dei rapporti fra le θ valori dei rapporti fra le $\Theta\left[s\left(v+\frac{b}{s}\right)\right]$, nelle quali la b non sia nulla, riducesi, per le (21) ovvero (26) e per la (65), alla analoga questione già risoluta, in cui si supponga $b=0$.

L'ordine, col quale i rapporti fra le $\Theta(sv)$ cambiansi gli uni negli altri, cambiando la v in:

$$v+\frac{\varepsilon'\gamma+\varepsilon}{2^{\alpha+1}}\,,$$

a seconda dei valori di δ e λ, viene rappresentato, osservando le (66), analogamente alla tabella (26), dalla:

$$(68)\quad \begin{cases} & 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ \delta \equiv 1, \lambda \equiv 1 & 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \\ \delta \equiv 1, \lambda \equiv 0 & 1 \quad 0 \quad 3 \quad 2 \qquad (\text{mod. } 2) \\ \delta \equiv 0, \lambda \equiv 1 & 2 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \end{cases}$$

Le d_r ed l_r, che entrano nella (61), sono tali che, nei sistemi :

$$\begin{array}{llll} (s)_1, & d_r \equiv 1, & l_r \equiv 1, & \\ (s)_2, & d_r \equiv 1, & l_r \equiv 0, & (\text{mod. } 2), \ (s=1,2,3; \\ (s)_3, & d_r \equiv 0, & l_r \equiv 1, & \end{array}$$

quindi, per la (61) stessa, risultano nei sistemi :

$$(69)\quad \begin{cases} (s)_1, \ \delta\equiv 1, \ \lambda\equiv 0 \ \text{ovvero} \ \delta\equiv 0, \ \lambda\equiv 1, \\ (s)_2, \ \delta\equiv 0, \ \lambda\equiv 1 \quad » \quad \delta\equiv 1, \ \lambda\equiv 1, \qquad (\text{mod. } 2) \\ (s)_3, \ \delta\equiv 1, \ \lambda\equiv 1 \quad » \quad \delta\equiv 1, \ \lambda\equiv 0, \end{cases}$$

Le (26), (68), (69), mostrano pertanto che, da ogni sistema di formole di trasformazione ottenuto, se ne ponno dedurre altri tre, mediante le relazioni :

$$(70)\quad \begin{cases} \dfrac{\Theta_0(sv+b)}{\Theta_1(sv+b)} = a_1 \dfrac{\Theta_3}{\Theta_2}, \quad a_2 \dfrac{\Theta_1}{\Theta_0}, \quad a_3 \dfrac{\Theta_2}{\Theta_3}, \\ \dfrac{\Theta_2(sv+b)}{\Theta_1(sv+b)} = b_1 \dfrac{\Theta_1}{\Theta_2}, \quad b_2 \dfrac{\Theta_3}{\Theta_0}, \quad b_3 \dfrac{\Theta_0}{\Theta_3} \\ \dfrac{\Theta_3(sv+b)}{\Theta_1(sv+b)} = c_1 \dfrac{\Theta_0}{\Theta_2}, \quad c_2 \dfrac{\Theta_2}{\Theta_0}, \quad c_3 \dfrac{\Theta_1}{\Theta_3}, \end{cases}$$

dove si è posto Θ in luogo di $\Theta(sv)$ e $\frac{b}{s}$ rappresenta espressioni della forma :

$$\frac{\xi'\gamma+\xi}{2},\quad \frac{\varepsilon'\gamma+\varepsilon}{2^{\alpha+1}},\quad \frac{\xi'\gamma+\xi}{2}+\frac{\varepsilon'\gamma+\varepsilon}{2^{\alpha+1}}$$

e le a_1, b_1, c_1; a_2 ec. tengono luogo dei rapporti:

$$\frac{f_{r,r1}}{f_{s,s1}},\quad \frac{f_{r,r1}}{f_{s,s1}}\cdot\frac{f_{p,p1}}{f_{q,q1}}.$$

Tali relazioni, ove si ponga:

$$(71)\quad \begin{cases} z=\text{sen}\,am(2\Delta(sv+b),\lambda)=\text{sen}\,am\left(\frac{u}{M}+2\Delta b,\lambda\right) \\ y=\text{sen}\,am(2\Delta sv,\lambda)=\text{sen}\,am\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right) \end{cases}$$

equivalgono evidentemente alle:

$$(72)\quad \begin{cases} z= \\ \pm\frac{1}{\lambda}\frac{\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}}{\sqrt{(1-y^2)}},\qquad \pm\frac{1}{\lambda y},\qquad \pm\frac{\sqrt{(1-y^2)}}{\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}} \\ \sqrt{(1-z^2)}= \\ \pm i\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}},\ \pm\frac{i}{\lambda}\frac{\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}}{y},\ \pm\lambda'\frac{y}{\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}} \\ \sqrt{(1-\lambda^2z^2)}= \\ \pm i\lambda'\frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}},\quad \pm i\frac{\sqrt{(1-y^2)}}{y},\quad \pm\lambda'\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}} \end{cases}$$

Considerando *p. e.* la trasformazione h_1 corrispondente al sistema $(1)_1$ ed attribuendo a $\frac{b}{s}$ successivamente i valori:

$$\frac{\gamma}{2},\quad \frac{\gamma+1}{2^{\alpha+1}}$$

si ottengono due sistemi di formole di trasformazione, usando, fra le relazioni (70) o (72), di quelle della prima colonna, poi della seconda o della terza, secondo che si sup-

pone :

$$\delta \equiv 1\,,\quad \lambda \equiv 0 \text{ ovvero } \delta \equiv 0\,,\quad \lambda \equiv 1\,,\qquad (\text{mod. } 2);$$

le relazioni della terza o seconda colonna si presentano quindi combinando i due sistemi ottenuti fra loro od alle medesime si ricorre attribuendo a $\frac{b}{s}$ il valore :

$$\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma+1}{2^{\alpha+1}}\,.$$

Ritenuto *p. e.* $\frac{b}{s} = \frac{\gamma}{2}$ ossia per le (11) :

$$2\Delta b = l_1\Delta + d_1 i\Delta'\,,$$

dalle (71) e dalla prima relazione della prima colonna delle (70) o (72), si ha:

$$z = \text{sen}am\left(\frac{u}{M} + l_1\Delta + d_1 i\Delta'\right) = \pm\frac{1}{\lambda}\frac{\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}}{\sqrt{(1-y^2)}}$$

ovvero :

$$\text{sen}am\left(\frac{u}{M} + l_1\Delta + d_1 i\Delta'\right) = \pm\frac{1}{\lambda \text{senco}am\frac{u}{M}}$$

equazione identica alla ($54\frac{1}{2}$), d_1 ed l_1 essendo numeri interi dispari. Si osservi, se vuolsi, per quello che verrà detto fra poco, che :

$$\int_0^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}} - i\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)}\sqrt{(1-\lambda'^2\zeta^2)}}$$

ossia :

$$\int_0^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}} = \Delta - i\Delta'$$

XIII. — La ω avendo la stessa forma per tutti i sistemi di formole di trasformazione corrispondenti ad una medesima classe, se tali sistemi si paragonano fra loro, si trovano, siccome espressioni delle relazioni che hanno luogo fra i medesimi, formole semplicissime, le quali rappresentano le 1.2.3.4 ossia ventiquattro maniere colle quali si può soddisfare alla equazione:

$$(73)\quad \begin{cases} \dfrac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}\sqrt{(1-l^2z^2)}} = \dfrac{M}{N}\dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}} \\ \qquad = \dfrac{dx}{N\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}}, \end{cases}$$

qualora per z non vogliansi assumere se non funzioni della y che siano rapporti fra due delle espressioni:

$$(74)\qquad A_0 y,\ A_1,\ A_2\sqrt{(1-y^2)},\ A_3\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}$$

A_0, A_1, A_2, A_3 essendo quantità costanti; per cui da rapporti fra le medesime vengono espresse anche le:

$$\sqrt{(1-z^2)}\ ,\qquad \sqrt{(1-l^2z^2)}$$

Fra i ventiquattro valori della z quelli che si annullano colla y i moduli ed i rapporti corrispondenti dei moltiplicatori sono:

$$(75)\quad\begin{cases} z=\pm y\,, & l=\pm\lambda\,, & \frac{M}{N}=\pm 1 \\ z=\pm i\frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}}\,, & l=\pm\lambda'\,, & \frac{M}{N}=\pm i\,, \\ z=\pm i\lambda\frac{y}{\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}}\,, & l=\pm i\,\frac{\lambda'}{\lambda}\,, & \frac{M}{N}=\pm i\lambda\,, \\ z=\pm\lambda'\frac{y}{\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}}\,, & l=\pm i\,\frac{\lambda}{\lambda'}\,, & \frac{M}{N}=\pm\lambda'\,, \\ z=\pm\lambda y\,, & l=\pm\frac{1}{\lambda}\,, & \frac{M}{N}=\pm\lambda\,, \\ z=\pm i\lambda'\,\frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}}\,, & l=\pm\frac{1}{\lambda'}\,, & \frac{M}{N}=\pm i\lambda'\,, \end{cases}$$

dai quali valori della z e dai corrispondenti delle $\sqrt{(1-z^2)}$, $\sqrt{(1-l^2z^2)}$ si ottengono evidentemente gli altri diciotto di quella e di queste applicando a ciascuno dei medesimi le formole (72); ed è manifesto che i valori della costante b, corrispondenti ai vari sistemi di formole di trasformazione, si ponno anche ottenere immediatamente dalle (72) e (75); tali valori essendo le quantità da aggiungersi all' uno dei due integrali ellittici, dei quali si paragonano i limiti variabili, perchè quelli possano entrambi essere presi a partire dal limite zero; quantità che non riescono nulle se non quando i limiti anzidetti sieno legati fra loro da una delle relazioni (75).

Fra i ventiquattro valori di z quelli razionali sono i primi quattro dati da Abel — Précis — uno dei quali viene rappresentato dalla equazione:

$$\text{sen}am\left(\lambda\frac{u}{M},\frac{1}{\lambda}\right)=\lambda\,\text{sen}am\left(\frac{u}{M},\lambda\right).$$

dalla pag. 70 dei *Fundamenta Nova*; nella stessa opera alla

pag. 71 o 90 trovasi notata la relazione :

$$\text{sen}am\left(\lambda\frac{u}{M},\ i\frac{\lambda'}{\lambda}\right)=\text{cosco}am\left(\frac{u}{M},\ \lambda'\right)$$

che, cambiata la u in iu, si muta nella :

$$\text{sen}am\left(\lambda i\frac{u}{M},\frac{i\lambda'}{\lambda}\right)=\text{cosco}am\left(\frac{iu}{M},\ \lambda'\right)=i\lambda\,\frac{\text{sen}am\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)}{\Delta am\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)},$$

e, alle pag. 90 o 91 Teor.ª I.° P. I.ª, 91 Teor.ª I.° P. 2.ª, queste altre :

$$\text{sen}am\left(\lambda'\frac{u}{M},\ \frac{i\lambda}{\lambda'}\right)=\text{cosco}am\left(\frac{u}{M},\ \ \lambda\right)=\lambda'\frac{\text{sen}am\left(\frac{u}{M},\ \ \lambda\right)}{\Delta am\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)},$$

$$\text{sen}am\left(\pm\lambda'\frac{u}{M}+\Delta,\ \frac{i\lambda}{\lambda'}\right)=\cos am\left(\frac{u}{M},\ \ \lambda\right),$$

le quali tre ultime relazioni rappresentano i valori di z :

$$\pm i\lambda\frac{y}{\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}},\ \pm\lambda'\frac{y}{\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}},\ \pm\sqrt{(1-y^2)}.$$

Le notissime relazioni della pag. 34 rappresentano il secondo dei valori (75) di z.

XIV. — Si passi ora a considerare la trasformazione d'ordine dispari. Osservata la relazione (12), si hanno i seguenti sistemi di numeri :

$$(76)\quad\left\{\begin{array}{l}d_1\equiv1,\ l_1\equiv1,\ d_2\equiv1,\ l_2\equiv0,\\ d_1\equiv1,\ l_1\equiv1,\ d_2\equiv0,\ l_2\equiv1,\\ d_1\equiv1,\ l_1\equiv0,\ d_2\equiv0,\ l_2\equiv1,\\ d_1\equiv1,\ l_1\equiv0,\ d_2\equiv1,\ l_2\equiv1,\\ d_1\equiv0,\ l_1\equiv1,\ d_2\equiv1,\ l_2\equiv0,\\ d_1\equiv0,\ l_1\equiv1,\ d_2\equiv1,\ l_2\equiv1,\end{array}\right.\quad(\text{mod. } 2).$$

Dalle (21) si ricava che, cambiando nelle funzioni $e^{\frac{i\pi d}{2} s v^2}\Theta(sv)$ la v in:

$$(77) \qquad v+\frac{\gamma}{2},\quad v+\frac{1}{2},\quad v+\frac{\gamma+1}{2},$$

le medesime si cambiano le une nelle altre, moltiplicate per fattori della forma:

$$a_{r\gamma s}\, e^{-i\pi n\left(v+\frac{\gamma}{4}\right)},\qquad b_{r\gamma s},\qquad c_{r\gamma s}\, e^{-i\pi n\left(v+\frac{\gamma}{4}\right)},$$

coll'ordine indicato dalla:

(78)

$v+\frac{\gamma}{2}$	$v+\frac{1}{2}$	$v+\frac{\gamma+1}{2}$	0	1	2	3
1°, 2°	4°, 6°	3°, 5°	3	2	1	0
3°, 4°	1°, 5°	2°, 6°	1	0	3	2
5°, 6°	3°, 2°	1°, 4°	2	3	0	1 ,

dove, come precedentemente, gl' indici 0, 1, 2, 3 rappresentano le rispettive funzioni $e^{\frac{i\pi d}{2} s v^2}\Theta(sv)$ ed i numeri 1°, 2°, ec. i sistemi di numeri (76).

Si supponga, qui pure in primo luogo, $b=0$. Avendosi per tutti i sistemi (76);

$$p_0 d_2+\mu_0 l_2+d_2 l_2\equiv 1,\quad p_0 d_1+\mu_0 l_1+d_1 l_1\equiv 1,\qquad (\text{mod. } 2)$$

ed essendo $\mu_0 p_0=1$, dalle (18) e (17), supposto $\theta_s=\theta_1$, si ha:

$$(79)\qquad e^{\frac{i\pi d}{2} s v^2}\Theta_0(sv)=a_0\vartheta_0^{\,n}+a_1\vartheta_0^{\,n-2}\theta_1^{\,2}+\ldots+a_{\frac{n-1}{2}}\,\theta_0\theta_1^{\,n-1},$$

dalla quale si ottengono immediatamente le espressioni delle altre funzioni $e^{\frac{i\pi d}{2} s v^2}\Theta(sv)$, cambiando la v successivamente nelle (77) ed osservando la (78) e le relazioni (23).

Per determinare i coefficienti a_0, a_1, ..., si ponga nella equazione superiore ξw in luogo di v, w essendo definita dalla (29), dove m, m_0 ed n si suppongono non ammettere fattore comune, e ξ numero intero; osservata la ($27\frac{1}{2}$), si ottiene:

$$\left[\frac{\theta_0(\xi w)}{\theta_1(\xi w)}\right]^{n-1} + \frac{a_1}{a_0}\left[\frac{\theta_0(\xi w)}{\theta_1(\xi w)}\right]^{n-3} + \ldots + \frac{a_{\frac{n-1}{2}}}{a_0} = 0,$$

nella quale, per la (32) e per essere $\theta_0(0) = 0$, si attribuiranno a ξ i valori:

$$1, 2, \ldots \frac{n-1}{2};$$

quindi la (79) si cambierà nella:

$$(80)\quad \begin{cases} e^{\frac{i\pi d}{2} sv^2}\, \Theta_0(sv) = a_0 \theta_1{}^n \dfrac{\theta_0}{\theta_1}\left[\dfrac{\theta_0{}^2}{\theta_1{}^2} - \dfrac{\theta_0{}^2(w)}{\theta_1{}^2(w)}\right] \cdots \\ \qquad \times \left\{\dfrac{\theta_0{}^2}{\theta_1{}^2} - \dfrac{\theta_0{}^2\left(\frac{n-1}{2}\, w\right)}{\theta_1{}^2\left(\frac{n-1}{2}\, w\right)}\right\}. \end{cases}$$

Si prenda a considerare qualcuno dei sistemi (76) in particolare. Il 3°, essendo quello adottato dal Sig. Brioschi, conduce, come l'illustre Geometra ha mostrato, alle formole di Jacobi. Assumendo il I° e cambiando nella (79) ed (80) la v successivamente nella (77) si trovano ordinatamente le:

$$a_{0,3}\, e^{\frac{i\pi d}{2} sv^2}\, \Theta_3(sv) = -\, a_0 \theta^n{}_1 \left[1 - \frac{\theta_0{}^2}{\theta_1{}^2}\frac{\theta_0{}^2(w)}{\theta_1{}^2(w)}\right] \cdots$$

$$\times \left\{1 - \frac{\theta_0{}^2}{\theta_1{}^2} \cdot \frac{\theta_0{}^2\left(\frac{n-1}{2}\, w\right)}{\theta_1{}^2\left(\frac{n-1}{2}\, w\right)}\right\}$$

$$b_{0,1}\, e^{i\pi d_2 s v^2}\, \Theta_1(sv) = a_0 \theta^n{}_1 \frac{i\theta_2}{\theta_1} \left[\frac{i^2\theta^2{}_2}{\theta^2{}_1} - \frac{\theta^2{}_3}{\theta^2{}_1} \frac{\theta^2{}_0(w)}{\theta^2{}_1(w)} \right]$$

$$\times \left\{ \frac{i^2\theta^2{}_2}{\theta^2{}_1} - \frac{\theta^2{}_3}{\theta^2{}_1} \frac{\theta^2{}_0\left(\frac{n-1}{2}\,w\right)}{\theta^2{}_1\left(\frac{n-1}{2}\,w\right)} \right\}$$

$$c_{0,2}\, e^{i\pi d_2 s v^2}\, \Theta_2(sv) = -a_0 \theta^n{}_1 \frac{i\theta_3}{\theta_1} \left[\frac{i^2\theta_3^2}{\theta^2{}_1} - \frac{\theta^2{}_2}{\theta^2{}_1} \frac{\theta_1{}^2(w)}{\theta_0{}^2(w)} \right]$$

$$\times \left\{ \frac{i^2\theta_3{}^2}{\theta_1{}^2} - \frac{\theta^2{}_2}{\theta^2{}_1} \frac{\theta_0{}^2\left(\frac{n-1}{2}\,w\right)}{\theta_1{}^2\left(\frac{n-1}{2}\,w\right)} \right\}$$

Dividendo la (80), l'ultima e la prima fra queste tre per la seconda, si ottengono tre equazioni, le quali, rammentando le (8) e (41) e ponendo :

$$(81) \qquad \omega = \mathrm{K}w + \frac{(md_1 - m_0 l_1)\mathrm{K} + (m_0 l_2 - md_2)i\mathrm{K}'}{n},$$

espressione che per valori opportuni di m ed m_0 può assumere una qualsivoglia delle forme (42), (52), (53), e ponendo inoltre :

$$
(82)\quad
\begin{cases}
\varphi_{0,d} = x\left(1-\dfrac{x^2}{s^2_2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{s^2_4}\right)\ldots\left(1-\dfrac{x^2}{s^2_{n-1}}\right), \\
\varphi_{1,d} = (1-k^2x^2s^2_2)(1-k^2x^2s^2_4)\ldots(1-k^2x^2s^2_{n-1}), \\
\varphi_{2,d} = \sqrt{(1-x^2)}\left(1-\dfrac{x^2}{\sigma^2_2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{\sigma^2_4}\right)\ldots\left(1-\dfrac{x^2}{\sigma^2_{n-1}}\right) \\
\varphi_{3,d} = \sqrt{(1-k^2x^2)}(1-k^2x^2\sigma^2_2)(1-k^2x^2\sigma^2_4)\ldots(1-k^2x^2\sigma^2_{n-1}) \\
p_d = k^{\frac{n}{2}}[s_2s_4\ \ldots\ s_{n-1}]^2 \\
q_d = k^{\frac{n}{2}}[\sigma_2\sigma_4\ \ldots\ \sigma_{n-1}]^2 \\
\tau_d = \dfrac{k'^{\frac{n}{2}}}{[\Delta_2\Delta_4\ \ldots\ \Delta_{n-1}]^2}
\end{cases}
$$

somministrano :

$$\frac{1}{b_{0,1}}\, i\sqrt{\lambda}\, y = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{p_d\tau_d}{q_d}\frac{\varphi_{0,d}}{\varphi_{0,d}}$$

$$\frac{c_{0,2}}{b_{0,1}}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}}\sqrt{(1-y^2)} = -\frac{1}{q_d}\frac{\varphi_{3,d}}{\varphi_{2,d}},$$

$$\frac{a_{0,3}}{b_{0,1}}\frac{1}{\sqrt{\lambda'}}\sqrt{(1-\lambda^2y^2)} = (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{\tau_d}{q_d}\frac{\varphi_{1,d}}{\varphi_{2,d}}$$

e queste, posto :

$$\frac{1}{M} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{p_d\tau_d}{q_d}\frac{b_{0,1}}{i\sqrt{\lambda}}$$

e posto $x = 0$, $y = 0$ nelle due ultime, per cui :

$$\frac{c_{0,2}}{b_{0,1}}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}}=-\frac{1}{q_d},\quad \frac{a_{0,3}}{b_{0,1}}\frac{1}{\sqrt{\lambda'}}=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{\tau_d}{q_d},$$

divengono :

$$y=\frac{1}{M}\frac{\varphi_{0,d}}{\varphi_{2,d}},\quad \sqrt{(1-y^2)}=\frac{\varphi_{3,d}}{\varphi_{2,d}},\quad \sqrt{(1-\lambda^2y^2)}=\frac{\varphi_{1,d}}{\varphi_{2,d}}$$

e per λ, λ', M dalle relazioni superiori, osservando che:

$$a_{0,3}=\pm e^{-i\pi\frac{d_1 l_1}{4}},\quad b_{0,1}=\pm e^{-i\pi\frac{d_2 l_2}{4}},\quad c_{0,2}=\pm i\, e^{-i\pi\frac{d_1 l_1+d_2 l_2}{4}},$$

si ricavano i seguenti valori :

$$\lambda=\pm\frac{1}{\tau^2_d},\quad \lambda'=\pm i\frac{q^2_d}{\tau^2_d},\quad \frac{1}{M}=\pm i\frac{p_d}{q_d}\tau^2_d\,.$$

Dai sei sistemi di formole di trasformazione corrispondenti ai sei sistemi di numeri (76) e pei quali la b è nulla, se ne ottengono altri diciotto, corrispondenti a valori della b diversi dallo zero, osservando che, nel caso di n dispari, le funzioni $e^{\frac{i\pi d_2 sv^2}{2}}\Theta(v)$, quindi anche i rapporti fra esse, si cambiano sempre in altre, cambiando la v in una qualunque delle (77), per cui b, per la (57), avrà la forma:

$$\frac{b}{s}=\xi'\frac{\gamma}{2}+\xi\frac{1}{2},$$

ξ', ξ essendo numeri interi: e giovandosi della (78). Fra i sistemi di formole di trasformazione che per tal modo si ottengono hanno luogo evidentemente tutte le relazioni notate fra i sistemi di una medesima classe corrispondenti alla forma pari di n.

XV. — La idea delle trasformazioni supplementarie alla moltiplicazione si offre spontanea, osservando le relazioni (11), (12). Nello stesso modo con cui furono espresse le

funzioni $e^{\frac{i\pi d_2 s v^2}{2}}$ $\Theta(sv)$ mediante le $\theta(v)$, si ponno esprimere le $e^{\frac{-i\pi d_2 r v^2}{2}}$ $\Theta(rv)$ od i loro rapporti mediante le $\Theta(v)$ o loro rapporti ed anche i rapporti fra le $\theta(rsv)$ col mezzo dei rapporti fra le $\Theta(sv)$ e quindi finalmente i rapporti fra le $\theta(rsv) = \theta(nv)$ in funzione dei rapporti fra le $\theta(v)$. Le formole per la moltiplicazione si otterranno pertanto, in virtù delle (11) e (12), combinando fra loro due fra i sistemi di formole di trasformazione ottenuti, scelti in modo che i numeri d_1, l_1, d_2, l_2, corrispondenti all' uno, abbiano ordinatamente la stessa forma, pari o dispari, dei numeri $l_2, -l_1, -d_2, d_1$, corrispondenti all'altro; cioè in modo che sussistano le relazioni :

$$d_1 \equiv l'_2 \ , \quad l_2 \equiv d'_1 \ , \quad (\text{mod. } 2);$$

gli accenti distinguono i corrispondenti all'uno da quelli corrispondenti all'altro dei due sistemi. Egli è dunque manifesto che fra le varie trasformazioni d'ordine pari, due potranno risguardarsi siccome supplementarie l' una dell' altra, ove corrispòndano a due sistemi di numeri d_1, l_1, . . . segnati

$$(r)_s \ , \quad (s)_r \ ;$$

così che le trasformazioni, che, usate due volte ponno condurre alla moltiplicazione, sono quelle corrispondenti ai sistemi $(r)_r$ cioè: $(1)_1$, $(2)_2$, $(3)_3$. Siffatte trasformazioni, nel caso di n dispari, corrispondono ai sistemi di numeri 2°, 3°, 4°, 5°; la trasformazione, per la quale $b = 0$, dovuta al sistema I° è supplementaria di quella che si riferisce al sistema 6° e viciversa.

Delle due trasformazioni d'ordine pari, nelle quali la y, che si annulla colla x, viene espressa razionalmente in funzione di questa, nessuna dunque usata due volte può condurre, cio che d'altronde é evidente, alla moltiplicazione. La trasformazione d'ordine pari, *p. e.* segnata h_1 nella I^a classe ripetuta somministrerebbe :

$$x_n = \sqrt{(1 - x^2)}\sqrt{(1 - k^2x^2)}.\, xP(x^2),$$

$$\sqrt{(1 - x^2{}_n)}\sqrt{(1 - k^2x^2{}_n)} = Q(x^2),$$

dove :

$$x = \text{sen}am(u,k)\ ,\quad x_n = \text{sen}am(nu,k)$$

e P, Q sono simboli di funzioni razionali; risultati notissimi.

XVI. — Circa le trasformazioni complementarie è evidente per le forme (42), (52), (53) ed (81) della ω, che la trasformazione complementaria di una qualsivoglia d'ordine pari della 1ª classe o di una qualsivoglia d'ordine dispari sarà pure rispettivamente una fra quelle d'ordine pari della 1ª classe o d'ordine dispari, e che le trasformazioni d'ordine pari della 2ª classe avranno per complementarie trasformazioni d'ordine pari della 3ª classe e viceversa.

Si ponga :

$$(83)\ \begin{cases} u = iu',\ \omega = i\omega', & \Delta b = i\Delta' b'\ , \\ x' = \text{sen}am(u',k'), & y' = \text{sen}am(au' + 2\Delta' b')\ , \end{cases}$$

Δ' esprimendo come precedentemente, la funzione completa corrispondente al modulo λ' complemento del modulo λ; si avranno le relazioni :

$$(84)\qquad \text{sen}am(u,k) = i\frac{\text{sen}am(u',k')}{\text{cos}am(u',k')}\ ,\ \text{etc.}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}\sqrt{(1 - k^2x^2)}} = i\,\frac{dx'}{\sqrt{(1 - x'^2)}\sqrt{(1 - k'^2x'^2)}}\ ,$$

equaz. (75), Fund. N. pag. 34; e per la (1) :

$$\frac{dy'}{\sqrt{(1 - y'^2)}\sqrt{(1 - \lambda'^2y'^2)}} = a\,\frac{dx'}{\sqrt{(1 - x'^2)}\sqrt{(1 - k'^2x'^2)}}\ .$$

Si indichino con :

$$s'_m,\ c'_m,\ \Delta'_m,\ tg'_m,\ \sigma'_m,\ p',\ q',\ \tau',\ \varphi'_0,\ \varphi'_1,\ \varphi'_2,\ \varphi'_3$$

espressioni formate colle k', x' come sono formate colle k, x

le espressioni denotate colle stesse lettere senza accento e si prenda a considerare anzitutto la forma che assume la p_α, (50), ponendo in essa $i\omega'$ in luogo di ω. Per la (84), si ottiene :

$$p_\alpha = (-1)^{\frac{n}{2}+1} k^{\frac{n}{2}-1} [tg'_2 tg'_4 \ldots tg'_{n-2}]^2 .$$

Ora, per le (8) e (23) ossia per la (5) della pag. 35 Fund. N., si ha :

$$\cos am(u + i\mathrm{K},k') = -\frac{ik}{k'}\frac{1}{\cos am(\mathrm{K}'-u,k')},$$

dalla quale, cambiando la u in $\mathrm{K}' - u$ ed osservando che per la (42) risulta :

$$\omega' = \frac{(2h'+1)\mathrm{K}' - (2h+1)i\mathrm{K}}{n}$$

e quindi, qualunque sia ζ :

$$\cos am(\zeta + n\omega' - \mathrm{K}' - i\mathrm{K}) = (-1)^{h+h'+1}\cos am\zeta ,$$

si ricava

$$\cos am(n\omega' - u)\cos am u = (-1)^{h+h'}\frac{ik}{k'} .$$

Da questa relazione, ove $\frac{n}{2}$ sia pari, ponendo in luogo di u successivamente: $2\omega'$, $4\omega'$, ... $\frac{n}{2}\omega'$, se ne ottengono $\frac{n}{4}$, l'ultima delle quali, moltiplicata pel prodotto dei quadrati delle altre, somministra :

$$[c'_2 c'_4 \ldots c'_{n-2}]^2 = (-1)^{h+h'+\frac{n-2}{4}}\frac{k^{\frac{n}{2}-1}}{k'^{\frac{n}{2}-1}} .$$

Se invece $\frac{n}{2}$ è dispari, ponendo nella medesima relazione

superiore in luogo di v successivamente: $2\omega'$, $4\omega'$, . . . $\left(\frac{n}{2}-1\right)\omega'$ e moltiplicando fra loro i quadrati delle equazioni risultanti, si ottiene :

$$[c'_2 c'_4 \ . \ . \ . \ c'_{n-2}]^2 = (-1)^{\frac{n-2}{4}} \frac{k^{\frac{n}{2}-1}}{k'^{\frac{n}{2}-1}}.$$

Ponendo $\frac{n}{2}-1 \equiv \varepsilon$ (mod. 2), alle due relazioni precedenti si può sostituire la :

$$[c'_2 c'_4 \ . \ . \ . \ c_{n-2}]^2 = (-1)^{\varepsilon(h+h')+\frac{n-2}{4}} \frac{k^{\frac{n}{2}-1}}{k'^{\frac{n}{2}-1}},$$

dalla quale, osservando che $c'_m = \frac{s'_m}{tg'_m}$, risulta :

$$p_\alpha = (-1)^{\varepsilon(h+h')+\frac{n-2}{4}} k'^{\frac{n}{2}-1} [s'_2 s'_4 \ . \ . \ . \ s'_{n-2}]^2$$

ossia :

$$p_\alpha = (-1)^{\varepsilon(h+h')+\frac{n-2}{4}} p'_\alpha ;$$

similmente per q_α.

Si hanno pertanto le relazioni :

$$p_\alpha=(-1)^{\varepsilon(h+h')+\frac{n-2}{4}} p'_\alpha \ , \quad q_\alpha=(-1)^{(1-\varepsilon)(h+h')+\frac{n}{4}} q'_\alpha \ , \quad \tau_\alpha=\tau'_\alpha \ ,$$

$$p_\beta=(-1)^{\frac{n}{2}-1} i\, p'_\gamma \ , \quad q_\beta=(-1)^{\frac{n}{2}} q'_\gamma \ , \quad \tau_\beta=\tau'_\gamma$$

$$p_\gamma=(-1)^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{i} p'_\beta \ , \quad q_\gamma=(-1)^{\frac{n}{2}} q'_\beta \ , \quad \tau_\gamma=\tau'_\beta \ ,$$

$$p_\delta=(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{p'_d}{q'_\delta}\tau'_d \ , \quad q_d=\tau'_\delta \ , \quad \tau_d=q'_\delta \ ,$$

$$\varphi_{0,\beta}=i\xi\varphi'_{0,\alpha}\,,\quad \varphi_{1,\alpha}=\xi\varphi'_{1,\alpha}\,,\quad \varphi_{2,\alpha}=\xi\varphi'_{2,\alpha}\,,\quad \varphi_{3,\alpha}=\xi\varphi'_{3,\alpha}\,,$$

$$\varphi_{0,\alpha}=i\xi\varphi'_{0,\gamma}\,,\quad \varphi_{1,\beta}=\xi\varphi'_{1,\gamma}\,,\quad \varphi_{2,\beta}=\xi\varphi'_{2,\gamma}\,,\quad \varphi_{3,\beta}=\xi\varphi'_{3,\gamma}\,,$$

$$\varphi_{0,\gamma}=i\xi\varphi'_{0,\beta}\,,\quad \varphi_{1,\gamma}=\xi\varphi'_{1,\beta}\,,\quad \varphi_{2,\gamma}=\xi\varphi'_{2,\beta}\,,\quad \varphi_{3,\gamma}=\xi\varphi'_{3,\beta}\,,$$

$$\varphi_{0,\delta}=i\xi\varphi'_{0,\delta}\,,\quad \varphi_{1,\delta}=\xi\varphi'_{2,\delta}\,,\quad \varphi_{2,\delta}=\xi\varphi'_{2,\delta}\,,\quad \varphi_{3,\delta}=\xi\varphi'_{3,\delta}\,,$$

dove : $\xi=(1-y'^2)^{-\frac{n}{2}}$.

Col mezzo di queste relazioni e delle :

$$y'=\frac{1}{i}\frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}}\,,\quad \sqrt{(1-y'^2)}=\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}}\,,$$

$$\sqrt{(1-\lambda'^2y'^2)}=\frac{\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}}{\sqrt{(1-y^2)}}\,,$$

osservando le (55) ed indicando, come nel caso di n pari, con :

$$h_r',\ h_r'',\ h_r''',\ k_r',\ k_r'',\ k_r'''$$

i sistemi di formole di trasformazione che deduconsi ordinatamente dai sistemi h_r, k_r col soccorso delle (70) o (72), si vede che le trasformazioni complementarie delle :

$$h_1\,,\ h_1',\ h_1'',\ h_1''',\ h_2\,,\ h_2',\ h_2'',\ h_2''',\ k_2\,,\ k_2',\ k_2'',\ k_2''',$$

sono le :

$$k_1\,,\ k_1',\ k_1''',\ k_1'',\ h_3\,,\ h_3',\ h_3''',\ h_3'',\ k_3\,,\ k_3',\ k_3''',\ k_3'',$$

e viceversa; intendendosi che, ove le prime rappresentino trasformazioni della 2ª classe, queste ultime rappresentino trasformazioni della 3ª e viceversa. Nel caso di n dispari, in cui cambia l'ordine delle funzioni φ' ed alcune trasformazioni potranno quindi essere complementarie di se stesse, sono complementarie delle :

1, 1′, 1″, 1‴, 2, 2′, 2″, 2‴, 3, 3′, 3″, 3‴, 5, 5′, 5″, 5‴

le :

6, 6′, 6‴, 6″, 4, 4′, 4‴, 4″, 3, 3′, 3‴, 3″, 5, 5′, 5″, 5‴

e viceversa. I numeri 1, 2,... rappresentano le trasformazioni analoghe alle (55) corrispondenti ai sei sistemi di numeri (76), i numeri cogli accenti quelle che se ne deduoono colle (70) o (72). Sono quattro pertanto le trasformazioni complementarie di se stesse, fra le quali la 3 cioè quella di Jacobi, che si è anche veduto essere supplementaria di se stessa.

Le cose finora esposte potevansi presentare sotto forma migliore.

XVII. — Si prenda da ultimo a considerare la trasformazione d'ordine pari, alla quale accenna Jacobi — *Fund. N. pag.* 18, — che costituisce il teorema XI dato da Abel nel Précis ecc. [1] cioè quella segnata h_3 nella classe 2^a. Per essa osservando le (55) e (52) e considerando un segno solo nella espressione del moltiplicatore, si ha:

$$(85)\quad \begin{cases} y = \dfrac{x}{M}\,\dfrac{\left(1-\dfrac{x^2}{s_2^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{s_4^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{x^2}{s_{n-2}^2}\right)}{\left(1-\dfrac{x^2}{s_1^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{s_3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{x^2}{s_{n-1}^2}\right)}, \\[2ex] \dfrac{1}{M} = -\dfrac{[tg_2 tg_4 \ldots tg_{n-2}]^2}{[tg_1 tg_3 \ldots tg_{n-1}]^2}, \quad \lambda = \pm\tau^2, \\[2ex] \lambda' = k'^n [tg_1 tg_3 \ldots tg_{n-1}]^4 . \end{cases}$$

Per dare di queste formole, fatta astrazione dalle cose esposte, una dimostrazione desunta dai principii dei *Fund. N.* si dimosterà la sussistenza delle relazioni 1), 2), 3), 4), cioè di una delle prime due e di una delle seconde due. Anzitutto si osservi che, pel segno adottato nel valore di M, ad $x = \pm 1$ corrisponde $y = \pm 1$; ma ad $x = \pm \dfrac{1}{k}$, rammentando che [2].

[1] Vedi §. I.

[2] Fund. N. pag. 35.

$$\frac{\Delta am(u+iK')}{\cos am(u+iK')} = \frac{k}{\frac{\Delta am u}{\cos am u}}$$

dalla quale, per la forma (52) di w:

$$\frac{\Delta am(n\omega - u)}{\cos am(n\omega - u)} \cdot \frac{\Delta am u}{\cos am u} = (-1)^h k\,,$$

corrisponde $y = (-1)^h$ (1).

Si ponga pertanto:

$$(86)\quad \frac{1}{y} - 1 = M(1-\varepsilon kx)\,\frac{1-x}{x}\,\frac{\left[\left(1-\frac{x}{\sigma_2}\right)\left(1-\frac{x}{\sigma_4}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\sigma_{n-2}}\right)\right]^2}{\left(1-\frac{x^2}{s_2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{s_4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{s^2_{n-1}}\right)},$$

dove per brevità $\varepsilon = (-1)^h$.

Da questa posizione, osservando che (2):

$$(87)\quad \frac{\left(1-\frac{\mathrm{sen}\,am u}{\mathrm{senco}\,am\alpha}\right)^2}{1-\frac{\mathrm{sen}^2 am u}{\mathrm{sen}^2 am\alpha}} = -\tan^2 am\alpha\,\frac{[1-\mathrm{sen}\,am(u+a)][1-\mathrm{sen}\,am(u-a)]}{\mathrm{sen}\,am(u+a)\,\mathrm{sen}\,am(u-a)}$$

(1) Perchè ad $x = 1$ corrisponda $y = 1$ dev'essere $h \equiv 0$ (mod. 2). Ora, per le (56) essendo:

$$\alpha = Kw = \frac{2mr + (2m_0+1)r_0}{n}\,.$$

ossia per le (11) e (6):

$$w = \frac{[2md_1 - (2m_0+1)l_1]K + [(2m_0+1)l_2 - 2md_2]iK'}{n}\,,$$

si ha:

$$2h = 2md_1 - (2m_0+1)l_1\,,$$

dalla quale, per essere, cong. (25): $d_1 \equiv l_1 \equiv d_2 \equiv 0$, $l_2 \equiv 1$, (mod. 2). si ha: $h \equiv \frac{1}{2}l_1$, (mod. 2). Se vuolsi si può dunque ritenere $h \equiv 0$ cioè $\frac{1}{2}l_1 \equiv 0$, senza togliere generalità al valore (12) di n.

(2) Fund. N. pag. 37.

e che, dalla 14) della pag. 35 Fund. N. avuto riguardo alla forma di ω, si ha:

$$(88) \qquad \mathrm{sen}am(u+n\omega)=\varepsilon\frac{1}{k\,\mathrm{sen}amu}$$

e quindi:

$$1-\varepsilon kx=1-\varepsilon k\,\mathrm{sen}amu=-\frac{1-\mathrm{sen}am(u+n\omega)}{\mathrm{sen}am(u+u\omega)},$$

ponendo nella precedente relazione (87) in luogo di α successivamente: 2ω, 4ω, ... $(n-2)\omega$ ed in luogo di $-\alpha$: $(2n-2)\omega$, $(2n-4)\omega$, ... $(n+2)\omega$, si ottiene:

$$\frac{1}{y}-1=\mathrm{L}\frac{(1-s_u)(1-s_{u+2\omega})\ \ldots\ (1-s_{u+(2n-2)\omega})}{s_u\ .\ s_{u+2\omega}\quad \ldots\quad s_{u+(2n-2)\omega}},$$

dove si é posto:

$$\mathrm{L}=(-1)^{\frac{n}{2}}\mathrm{M}[tg_2\ tg_4\ .\ .\ .\ tg_{n-2}]^2,$$
$$s_{u+m\omega}=\mathrm{sen}am(u+m\omega).$$

Siffatta relazione mostra che y rimane invariata cambiando la u in $u+2p\omega$, p essendo numero intero; e siccome, ponendo in essa ω in luogo di u e riflettendo che:

$$(89) \qquad \begin{cases} s_{2n-1}=-s_1\ , \\ s_{2n-3}=-s_3\ , \\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ s_{n+1}=-s_{n-1}\ , \end{cases}$$

si ha:

$$\frac{1}{y}-1=\mathrm{M}\frac{[tg_2tg_4\ .\ .\ .\ tg_{n-2}]^2}{[tg_1tg_3\ .\ .\ .\ tg_{n-1}]^2}=-1$$

ossia $y=\infty$, così y diverrà infinita per tutti i valori di

u della forma: $(2p+1)\omega$, ai quali corrispondono gli n valori diversi fra loro della x seguenti:

$$\pm s_1\,,\quad \pm s_3\,,\quad .\;.\;.\quad \pm s_{n-1}\,.$$

Ora, per la (86), ponendo:

$$y=\frac{\text{M}}{\text{V}}\,,\quad \text{U}=\frac{x}{\text{M}}\left(1-\frac{x^2}{s_2^{\,2}}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{s^2_{\,n-2}}\right),$$

V dev'essere funzione razionale ìntera di grado n, perciò:

$$\text{V}=\text{H}\left(1-\frac{x^2}{s_1^{\,2}}\right)\left(1-\frac{x^2}{s_3^{\,2}}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{s^2_{\,n-2}}\right),$$

la costante H dev'essere uguale all'unità, perchè ad $x=1$ corrisponde per la (86) stessa $y=1$ ossia $\text{U}=\text{V}$. La (86) pertanto, che conduce alle (85) e che perciò ne è conseguenza, dimostra la:

$$\text{V}-\text{U}=(1-x)(1-\varepsilon kx)\text{B}^2$$

Ponendo ora:

$$(90)\qquad 1\pm\lambda y=\frac{\left[\left(1-\frac{x}{\sigma_1}\right)\left(1-\frac{x}{\sigma_3}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\sigma_{n-1}}\right)\right]^2}{\left(1-\frac{x^2}{s_1^{\,2}}\right)\left(1-\frac{x^2}{s_3^{\,2}}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{s^2_{\,n-1}}\right)}$$

o, ciò che è lo stesso per la (87):

$$1\pm\lambda y=\text{G}\,\frac{(1-s_{u+\omega})(1-s_{u+3\omega})\ldots(1-s_{u+(2n-1)\omega})}{s_{u+\omega}\,.\,s_{u+3\omega}\,.\,.\,.\,s_{u+(2n-1)\omega}}\,,$$

$$\text{G}=(-1)^{\frac{n}{2}}\,[tg_1tg_3\,.\,.\,.\,tg_{n-1}]^2\,,$$

La y non si cambia, cambiando la u in $u+2p\omega$; inoltre per $u=0$, riflettendo alle (89), si ha $1-\lambda y=1$ ossia $y=0$; dunque la y si annulla por tutti i valori di u della forma $2p\omega$ e quindi pei valori di x:

$$0,\pm s_2,\ \pm s_4,\ .\;.\;.\ \pm s_{n-2},\ \pm s_n\ ,$$

dei quali i due ultimi, equivalendo per la (88) a $\pm\infty$, mostrano che il grado del numeratore nel valore di y è inferiore al grado del denominatore. Epperò ne segue:

$$y = \frac{x}{M}\,\frac{\left(1-\frac{x^2}{s_2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{s_4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{s_{n-2}^2}\right)}{\left(1-\frac{x^2}{s_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{s_3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{s_{n-1}^2}\right)};$$

la costante M trovasi definita dalla seconda delle (85), osservando, se vuolsi, che la relazione risultante dal prodotto della (90) per quella che se ne ottiene, cambiando le x, y in $-x$, $-y$, somministra, per $x=\pm 1$, $y=\pm 1$. La (90) dimostra la sussistenza delle seconde due relazioni della pag, 18, F. N. e quindi anche l'esattezza delle formole (85).

XVIII. — Prima di passare a considerare le formole del Précis si noti che, indicando con τ una espressione della forma:

$$(91)\qquad \tau = 2\rho K + (2\rho' + 1)iK',$$

ρ e ρ' essendo numeri interi, si ha, per le (8):

$$\text{sen}am(\tfrac{1}{2}\tau, k) = \frac{1}{i\sqrt{k}}\,\frac{\theta_0\left(\rho\frac{1}{2}+\rho'\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma}{4}\right)}{\theta_1\left(\rho\frac{1}{2}+\rho'\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma}{4}\right)}$$

dalla quale, per le (23) e per le:

$$\frac{\theta_3\left(\frac{1}{4}\gamma\right)}{\theta_2\left(\frac{1}{4}\gamma\right)} = 1, \ldots,$$

che dalle medesime derivano, si ottiene:

$$(92)\qquad \text{sen}am\,\tfrac{1}{2}\tau = \frac{(-1)^{\rho'(\rho+1)}}{\sqrt{[(-1)^{\rho+1}k]}};$$

e si ha anche, analogamente alla (88):

$$\mathrm{sen}am(u+\tau)=\frac{(-1)^{\rho}}{k\,\mathrm{sen}am\,u}\,,\quad \text{da cui :}$$

$$\mathrm{sen}am\,\tau=\frac{1}{0}\,. \tag{93}$$

Si osservi inoltre che, quando sia $\frac{n}{2}\equiv 1$ (mod. 2), dalla espressione (85) di y, si ottiene una espressione del modulo λ nella maniera seguente.

Si rammenti che le (41) e (40) forniscono :

$$y=\mathrm{sen}am\left(\frac{u}{\mathrm{M}}\,,\,\lambda\right);\ \frac{1}{\mathrm{M}}=\frac{\Delta}{\mathrm{K}}s\ ;$$

per cui, detto y_0 il valore di y, che corrisponde al valore di u.

$$u_0=\mathrm{K}\,\frac{(2\beta+1)r+(2\beta_0+1)r_0}{n}\,,$$

β e β_0 essendo numeri interi, si ha, per le (11) :

$$y_0=\mathrm{sen}am[(2\beta+1)\Delta+(2\beta_0+1)i\Delta'\,,\,\lambda]$$

od anche :

$$y_0=\frac{(-1)^{\beta}}{\lambda\,\mathrm{sen}am(\Delta\,,\,\lambda)}=\frac{(-1)^{\beta}}{\lambda}\,. \tag{94}$$

Ora, per avere supposto $\frac{n}{2}\equiv 1$ (mod. 2), si può porre :

$$(2\beta+1)=\frac{n}{2}(2\varepsilon+2)\,,\quad (2\beta_0+1)=\frac{n}{2}(2\varepsilon_0+1)\,,$$

ε ed ε_0 rappresentando numeri interi, per il che il valore di u_0 assume la forma :

$$u_0=\mathrm{K}\,\frac{(2\varepsilon+1)r+(2\varepsilon_0+1)r_0}{2}\,,$$

la quale espressione, rammentando le (11) ed osservando che, per essere :

$$d_1\equiv 0\,,\ l_1\equiv 0\,,\ d_2\equiv 0\,,\ l_2\equiv 1\quad (\text{mod. } 2)\,, \tag{95}$$

si può stabilire :

$$(96)\quad \begin{cases} \dfrac{(2\varepsilon+1)d_1-(2\varepsilon_0+1)l_1}{2}=\eta \\[2ex] \dfrac{(2\varepsilon_0+1)l_2-(2\varepsilon+1)d_2}{2}=\eta'+\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

intendendo con η, η' due numeri interi, si cambia nella:

$$u_0=\frac{2\eta K+(2\eta'+1)iK'}{2}.$$

Ciò posto, il valore x_0 della x, che corrisponde al valore u_0 di u, per le (91) e (92) viene rappresentato da:

$$x_0=\frac{(-1)^{\eta'(\eta+1)}}{\sqrt{[(-1)^{\eta+1}k]}}$$

Il numero h, che entra nella espressione di ω:

$$\omega=Kw=\frac{2mr+(2m_0+1)r_0}{n}=\frac{2hK+(2h'+1)iK'}{n},$$

ha la forma:

$$h=\frac{2md_1-(2m_0+1)l_1}{2},$$

se pertanto si paragona questo valore di h al valore (96) di η e si riflette alle (95), si vede: $h\equiv\eta+1$ (mod. 2); per cui il valore superiore di x_0 diviene:

$$x_0=\frac{(-1)^{\eta' h}}{\sqrt{[(-1)^h k]}}.$$

Epperò il modulo λ, ove sia $\frac{n}{2}\equiv 1$ (mod. 2), è eguale all'unità divisa pel valore che assume la x per

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{[(-1)^h k]}}.$$

Se vuolsi, si può evidentemente ritenere $\beta\equiv\eta'\equiv 0$ (mod. 2).

LEONARDO PISANO MATEMATICO DEL SECOLO XIII.

ARTICOLO

DEL SIG. ANGELO GENOCCHI.

(Estratto dalla *Rivista Contemporanea*, Anno quinto, Volume nono, fascicolo XL — febbraio 1857, pag. 307—321)

La ristampa degli *Opuscoli di Leonardo Pisano*, che don Baldassarre Boncompagni scoprì in un Codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano, e pubblicò a Firenze nel 1854, ci offre l' occasione di far conoscere ai lettori della *Rivista* un lungo, e dotto scritto del Boncompagni, stampato nello stesso anno (salvo alcune aggiunte e mutazioni introdotte più tardi) *intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano* ([1]), dove ha radunate con infinita diligenza ed esattezza molte particolarità valevoli soprattutto ad illustrare gli accennati *Opuscoli* del più antico algebrista italiano.

Descrive il Boncompagni due copie a lui prima ignote dell'opera maggiore di Leonardo Pisano, intitolata *Liber Abbaci*, che sono, l' una nella Biblioteca Ambrosiana di Mi-

([1]) *Opuscoli di Leonardo Pisano, pubblicati da Baldassarre Boncompagni, secondo la lezione di un codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano. Seconda edizione. Firenze, tipografia Galileiana di M.Cellini e C.*, 1856. Di pag. XXVII e 129 in 8° con una tavola. — *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo, Notizie raccolte da Baldassarre Boncompagni, socio ordinario dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei. Roma, tipografia delle Belle Arti*, 1854, Di pag. VIII e 409 con *fac-simile*.

Gli esemplari di queste due pubblicazioni si trovano in parte presso il Boncompagni in Roma, e in parte presso il signor *Edwin Tross, libraire, à Paris, rue des Bons Enfants, N.* 28.

lano, l' altra nella Reale Borbonica di Napoli; e narra di avere nella prima trovati altresì, in un Codice del quattrocento, gli scritti di Leonardo, che poscia divulgò per le stampe. Traduce nel moderno linguaggio algebrico alcuni problemi che contiene la prima parte di questi scritti, ed esprime nello stesso linguaggio le loro soluzioni; prova che il *principe Federico*, a cui sono indirizzati, è Federico II d' Hohenstaufen vigesimosesto imperator d' Alemagna, e che un Robertino, *donzello* di quel principe ivi mentovato, doveva essere un giovane suo famigliare, figliuolo probabilmente di qualche magnate o di qualche militare; prova ancora che il cardinale nominato nel prologo e in altri luoghi è Raniero Capocci da Viterbo, creato cardinale diacono del titolo di S. Maria in Cosmedin da papa Innocenzo III. Dalla data del *Liber quadratorum*, uno dei citati scritti, e dalla dedicatoria in cui Leonardo afferma essere stato presentato in Pisa da un maestro Domenico all' imperator Federico, il signor Boncompagni prende argomento a discutere in qual anno esso Federico sia venuto a Pisa; e allo storico Raffaello Roncioni, che vi assegna l' anno 1220, contrappone antichi e autorevoli documenti, specialmente diplomi e decreti di Federico. Mostra che un *maestro Teodoro filosofo dell' imperatore*, menzionato nel *Liber quadratorum*, e al quale sono altrove intitolate alcune questioni *avium et similium*, è il medesimo che nel 1238, quando gl' imperiali stringevano Brescia d'assedio, sostenne una disputa filosofica contro Rolando Cremonese, frate domenicano, e ne fu vinto, e che nel 1239, preso l'oroscopo, indicò a Federico l' ora di mover l' esercito da Padova a Castelfranco; e non è senza diletto il leggere come Teodoro, di nazione straniero, tracotante e schernitore de' letterati d' Italia restasse al cospetto dell' imperatore confuso dal Cremonese, il quale non avea potuto *soffrire tanta infamia al nome italiano*, e intanto si apparecchiasse un altro smacco agl' imperiali, che

per la viril difesa di Brescia furono costretti, dopo due mesi e sei giorni, a levar l' inutile assedio. Del *maestro Domenico* dianzi accennato, e probabilmente il medesimo a cui Leonardo dedicò la sua *Practica Geometriae*, conghiettura che sia il *Dominicus Hispanus* nominato nell' *Astronomia* di Guido Bonatti come uno dei dotti contemporanei dell' autore. Prova che il *Liber de numero* o *liber numeri*, mentovato da Leonardo in parecchi luoghi de' suoi opuscoli, è veramente il *Liber Abbaci* dello stesso autore, e reca i passi a cui questi allude; mediante un diploma d' investitura certifica che l' imperatore Federico fu in Pisa nel 1249, ma corregge il Guglielmini, perchè a quell' anno riferisce l' incontro di Federico con Leonardo, perchè lo suppone avvenuto in Fucecchio tra Capraia e Pisa, e perchè intende dimostrare che nello stesso anno o nel seguente fu scritto il *Liber quadratorum*. Corregge pure il Targioni Tozzetti, che rimproverò a Luca Pacioli d' aver citato solo una o due volte Leonardo Pisano nella sua *Somma d' aritmètica e geometria*, tolta in gran parte dal *Liber Abbaci*, e stampata nel 1494, e adduce ben nove passi in cui Leonardo é dal Pacioli onoratamente ricordato; nota ancora qualche abbaglio del Libri e d' altri.

Oltre alla testimonianza del Codice Ambrosiano e del Codice Urbinate citato dal Boncompagni, che assegnano al *Liber quadratorum* la data del 1225, si prova con due luoghi del *Liber Abbaci*, in cui Leonardo fa menzione di quel suo libro, ch' esso fu scritto prima del 1228; anno della *correzione* o seconda edizione del *Liber Abbaci*: l' uno è nel capo 15°, pubblicato dal Libri (*Hist. des. sc. math.*, tom. II, pag. 348); l' altro nel cap. 12°, tuttora inedito, parte prima, *De collectione numerorum*.

Il Boncompagni ha scoperto eziandio nella Biblioteca Vaticana di Roma, nella I. e R. Palatina di Firenze e nella Pubblica Comunale di Siena tre manoscritti del secolo XV,

dove sono tradotti in italiano molti ed assai lunghi frammenti delle opere di Leonardo Pisano, e (nel terzo di essi) quasi intero il *Liber quadratorum*. In questi manoscritti è fatta menzione d'un Antonio Mazzinghi da Peretola, pubblico professore di matematica a Firenze nel secolo XIV, e d' un Giovanni di Bartolo dell' Abbaco, discepolo del Mazzinghi, e a lui succeduto nell' insegnamento in età di 19 anni; e si attesta che a quell' Antonio Mazzinghi, dopo lunghe dispute e accurata investigazione, furono licenziati circa 800 volumi di libri d' astrologia, lasciati da Paolo Dagomari, e con testamento del 1367 da lui assegnati ad un astrologo fiorentino, che dovea essere approvato per giudizio di quattro maestri; libri de' quali gli eruditi ignoravano in che mani fossero pervenuti. Curioso è il racconto delle brighe fatte contro Giovanni dell' Abbaco, che era figliuolo d' un muratore, e quasi fanciullo aveva riaperta la scuola del Mazzinghi, dagl' invidiosi suoi colleghi; e curiosa è la *portata*, o descrizione de' suoi beni, crediti e debiti, scritta nel 1427 dal medesimo Giovanni, che allora aveva 63 anni, e tratta dall' Archivio delle Decime di Firenze. Pensa il Boncompagni che il *maestro Antonio arismetra e astrologo*, amico di Franco Sacchetti, menzionato da mons. Bottari nella sua prefazione alle Novelle di Franco Sacchetti, sia Antonio de' Mazzinghi da Peretola, e riferisce due lettere di lui a Franco Sacchetti con una risposta di questo ed un sonetto che è citato nel Vocabolario della Crusca. Aggiunge pregevoli notizie di Filippo Pieruzzi, vissuto nel quattrocento, che possedette un' opera di Giovanni dell' Abbaco; del padre Tommaso di Matteo Sardi, autore di un poema intitolato *Anima Peregrina*, che incominciò un catalogo della Biblioteca di S. Maria Novella di Firenze; di Antonio Corbinelli, dotto fiorentino, stato uno de'priori del 1416, che ebbe a precettore il celebre Guarino Veronese, e che morendo legò i suoi libri al monastero della

Badia di Firenze, e tra essi il più compito esemplare ora esistente del *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano, ed un pregevolissimo esemplare della sua *Practica geometriae*; e accennate le vicende a cui quelle biblioteche andarono soggette, mostra come questi due esemplari passassero alla Magliabechiana che tuttora li possiede.

Il trattato contenuto nel Codice sanese sopra indicato fu composto nel 1463, e l' autore sembra *Benedetto*, aritmetico fiorentino. Anonimi sono quelli de' codici Vaticano e Palatino, se non che gli autori si dichiarano *naturati*, cioè generati o nati in Firenze. Il Codice sanese presenta singolari rassomiglianze con l'altro, ora scomparso, che il Targioni Tozzetti vide in Santa Maria Nuova di Firenze e che conteneva una copia del *Liber quadratorum*. Nel Palatino è importante questa notizia delle opere di Leonardo Pisano [1]: « Compose Leonardo molti libri di nostra scienzia, fra i quali furono questi de' quali ho cognizione, cioè il libro de' mercatanti, detto di minor guisa, il libro de' fiori, il libro de' numeri quadrati, il libro sopra il 10° d' Euclide, il libro di pratica di geometria, il libro di pratica d' aritmetica. » Il *libro di minor guisa* è ricordato da Leonardo stesso nell' undecimo capitolo del suo *Liber Abbaci*, e ad un commento sopra il decimo libro d' Euclide, egli allude nel principio del suo *flos* (libro de' fiori) pubblicato dal Boncompagni, ma l' uno e l' altro sembra che siano perduti.

Hanno pure importanza per la loro antichità, da cui risulta un' autorevole testimonianza nella questione agitata circa l' introduzione dell' aritmetica decimale, i due passi seguenti, l' uno tratto dal Codice Vaticano, l'altro dal Codice della biblioteca comunale di Siena. Nel primo [2], par-

[1] Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano*, pag. 241.

[2] *Ivi*, pag. 128.

lando di Leonardo Pisano e della sua pratica d' aritmetica, si afferma che egli « in tanta perfezione venne che fu quello che diè lume al mostrare questa pratica in Italia, e questo mostra maestro Antonio (de' Mazzinghi) nel fioretto dove dice: — O Leonardo Pisano, di quanta scienzia fosti quando desti principio all' Italia ad avere lume della pratica d'aritmetica. »

Con poca differenza questo passo è riprodotto nel Codice Palatino , ove è detto che Leonardo « imparò nelle parti d'Egitto e quivi disputando venne perfettissimo , e lui in queste parti toscane prima dètte lume e dichiarazione della regola. E questo è manifesto per le parole di maestro Antonio nel libro de' fioretti suoi, dove dimostra lo intelletto di detto Leonardo Pisano essere grandissimo (1). »

Nel Codice sanese (2) si legge: « Dico che Leonardo Pisano fu uomo sottilissimo in tutte dispute, e secondo che si trova, lui fu il primo che ridusse al lume questa pratica in Toscana, che allora s' andava per vie molto strane, nientedimeno d' assai tempo innanzi a lui in questa nostra città furono scuole d' abaco, chè circa al 1348 ho veduto trattato che dice in Firenze essere più di 10 centinaia di fanciulli alle scuole dell' abaco , che poco innanzi fu Lionardo. E ancora come si vede lo 'nsegnare loro era a modo antico e quasi al modo che osservano di presente i Veneziani, che è meraviglia i sufficienti maestri vi sono stati e sono, come e' non hanno ridotto in una facile pratica tutto (3) ».

Oltre al rammentato Codice sanese, altri due Codici, l'uno della Vaticana , l'altro della Palatina, recano volgarizzata una parte del *Liber quadratorum*. Il Boncompagni trascrive

(1) Boncompagni , *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano* , pag. 240.

(2) *Ivi*, pag. 251.

(3) In queste citazioni ho per comodità del lettore sostituita l'ortografia moderna a quella de' manoscritti,

alcuni brani dell'ultimo, che, acquistato nel principio del cinquecento da un Marco di Tinoro Bellacci e posseduto poi dalla famiglia Guadagni, era passato a Gaetano Poggiali e da'suoi eredi alla Palatina di Firenze; e posti que'brani a fronte dell'originale, gl'illustra con una traduzione algebrica.

Chiuderemo questo sunto, troppo insufficiente, dell'opera eruditissima del signor Boncompagni, indicando i ragguagli che, parte nel testo e parte in un'appendice, egli ci somministra intorno a Paolo Dagomari da Prato, chiamato da Franco Sacchetti *Paolo Arismetra ed Astrologo*, e *Paolo Arismetra*, da altri *Paolo Astrologo*, e comunemente detto *Paolo Geometra*, o *Paolo dell'Abbaco*.

Pubblica il testo latino della sua vita scritta da Filippo Villani e tratta da un Codice della Biblioteca Barberina di Roma, dove é fatta menzione di un monumento eretto a Paolo nella chiesa di s. Trinita in Firenze, ricordato pure in altre opere ([1]); cita un sonetto attribuito a Giovanni Acquettini, contemporaneo del Burchiello, che accenna alla stessa sepoltura del Dagomari, e mostra che di questa parla il Vasari, e non già come altri hanno supposto del sepolcro di Paolo Toscanelli astronomo e medico fiorentino, morto nel 1485. Reca l'epitaffio che vi era scolpito e che fu conservato dal Poccianti. Questo monumento dovette sparire tra il 1589 e il 1655: il Rosselli nel suo *Sepoltuario fiorentino* dice che non meno di molte altre antiche memorie, avrà ceduto o all'avarizia de' monaci o all'ambizione de' moderni; Giovanni Cinelli Calvoli accenna allo stesso proposito, come siasi spesso

([1]) Anche nel codice sanese (contrassegnato L. IV. 21.) si parla delle *cappelle* di S. Trinita *murate coi denari* di Paolo e portanti l'arme della famiglia, *che sono foglie di vite* (Boncompagni, pag. 140). Nel codice palatino, E 5. 5. 14, è detto che le ossa di Paolo sono in s. Trinita (*ivi*, pag. 275).

usato *da persone indiscrete con diligenza asinina levar via l'armi ed i pitaffi*; secondo un Codice della Magliabechiana, sarebbe stato nascosto nel fondo d'una cantina del convento mentre si restaurava la cappella. Il Dagomari è pur nominato nel poema *De illustratione urbis Florentiae* di Ugolino di Vieri, detto il *Verino*, vissuto dal 1438 al 1516, siccome prova il Boncompagni, il quale di più ci dà notizie d'un Codice Riccardiano, contenente una versione italiana di quel poema, e d'un volgarizzamento manoscritto da lui posseduto e diverso in parte dallo stampato. Dalle menzioni che fanno di Paolo il Boccaccio nella sua opera *De genealogia Deorum*, Zenone Zenoni nella *Pietosa Fonte*, e da altri argomenti si desume che Paolo morì nel 1373 o nel 1374; si dimostra ancora che fu uno de' priori di Firenze nel 1363. Giovanni Villani cita una sua *adequazione* intorno ad una congiunzione di Saturno e Giove avvenuta il 28 marzo 1345; in uno de' Codici Palatini sopra mentovati si legge ([1]) ch'egli compose un *Trattato delle quantità continue* e che laddove molti si sforzavano di dimostrare che la dottrina delle proporzioni non *era bisognevole alle regole d'algebra*, Paolo all'incontro in quel trattato diceva *nulla potersi fare senza la prima parte del 15° capitolo di Leonardo Pisano* che tratta appunto delle proporzioni. Abbiamo da ultimo nel libro del Boncompagni una lista delle altre opere di Paolo dell'Abbaco, delle edizioni e dei manoscritti che le contengono. Sono stampati un sonetto a Jacopo Alighieri, una canzone che comincia: «Voce dolente più nel cor che piagne,» un sonetto d'argomento astrologico, e alcune regole aritmetiche intitolate *Regoluzze del maestro Paolo.* Il Libri che le pubblicò, e che prima attribuiva al Dagomari, si mostrò poi dubbioso per un contrario asserto del Ghaligai; ma col signor Cesare Guasti il Boncompagni cita tre Codici, in cui

([1]) Boncompagni, pag. 275.

sono dette di *Maestro Paolo astrologo*, talchè sembrano veramente del Dagomari. Il Manni e il Mazzucchelli affermano che una impressione de' libri astrologici di Paolo si fece a Basilea nel 1532, ma nè il Tiraboschi, nè il Guasti, nè il Boncompagni videro questa edizione. Compose inoltre il Dagomari due operette astronomiche, l'una *del corso dei pianeti e delle loro case*, conservata nella Magliabechiana, l'altra che trovasi nella Palatina ed è intitolata *Operatio Cilindri* scritta per mano di Giovanni dell'Abbaco e pubblicata per intero dal Boncompagni con due brevi scritti aritmetici tratti da altre biblioteche; un trattato d'aritmetica, ricordato da Francesco Redi, che si legge in un Codice Riccardiano con una regola per *trovar la luna nuova*; un *libro di più maniere di ragioni* posseduto dal Libri; un trattato *delle mute* e un *libro* senza titolo mentovati in altri Codici Riccardiani; un trattato d'aritmetica esistente nella Magliabechiana. Alcune *Tabulae Planetarum* esistenti nella stessa Biblioteca sono attribuite a Paolo dallo Ximenes. Si hanno pure due sonetti di *Maestro Paolo dell'Abbaco a ser Durante Giovanni* che si conservano nella Biblioteca Trivulzia di Milano con altri due di ser Durante a Maestro Paolo, e sono ora dal Boncompagni pubblicati. Infine Federico Ubaldini cita le canzoni di Paolo secondo un *manoscritto del signor Mario Milesio*, e Mons. Allacci nomina *Pagolo da Firenze* nel suo *Indice di poeti*.

Una delle accennate *Regoluzze di Maestro Paolo* prescrive di separare a tre a tre con un punto le figure d'un numero per rilevarlo più facilmente: quindi il signor Terquem seguendo il Libri fa primo autore di una tal regola il Dagomari (1). Ma il signor Michele Chasles e il Boncompagni avevano già notato ch'essa fu data anche dall'inglese Sacro-

(1) *Bulletin mathématique*, tom. II, pag. 71.

bosco nel secolo XIII [1], e dobbiamo aggiungere che si trova parimente nel primo capitolo del *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano, perocchè quivi pei numeri difficili a leggersi *propter multitudinem figurarum* suggerisce che si accenti *in inferiori parte* la quarta figura, la settima, la decima, ecc. Per agevolare vieppiù la lettura, Leonardo mette un altro accento *in superiori parte* alla terza figura, alla sesta, alla nona, ecc. Egli insegna allo stesso fine anche un'altra regola, cioè di tirare una linea *in modum arcus* sopra ogni gruppo di tre figure che presenta il numero dato andando da destra verso sinistra [2]. Nella quale seconda regola il signor Chasles vorrà forse vedere una conferma della sua opinione che fa derivare dall'abbaco di Boezio e Gerberto l'aritmetica decimale odierna, e specialmente la divisione de' numeri in gruppi di tre figure costituenti migliaia, migliaia di migliaia ecc. [3]. A questo proposito egli riferisce al secolo XVII i nomi di milione, bilione, trilione, ecc., e gli fa eco il Terquem [4]; ma questi vocaboli che appo gl'Italiani e anche appo Alberto Girard corrispondono a segmenti di sei figure sono assai più antichi : la voce *milione* divenne il soprannome di Marco Polo, e la Crusca ne reca un esempio tratto da Giovan Villani [5]. Lo Chasles aveva eziandio indicato trattati dove s'incontrano le *tetradi* d'Apollonio, cioè i segmenti di quattro figure [6].

Come la prima delle *Regoluzze*, così troviamo in Leonardo Pisano le questioni che il Libri dice sciolte nell'opera del Dagomari da lui posseduta, e che risguardano alle

(1) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, tom. XVI, pag. 1402. — Boncompagni, *Intorno*, ecc., pag. 369.

(2) Codice Riccardiano, n°. 783.

(3) *Comptes rendus*, tom. XIV, pag. 557; tom. XVI, pag. 167 e 1402.

(4) *Bulletin mathématique*, tom. I, pag. 73 e 136.

(5) V. anche Peacock, *Arithmetic*, art. 16.

(6) Chasles, *Aperçu historique*, ecc., pag. 559.

equazioni dei due primi gradi, alle equazioni cubiche binomie, e all' equazione indeterminata $x^4 - 36x^2 = z^2$ [1]. Rispetto a quest' ultima (poichè non occorre parlar delle altre), volendosi che x e z siano numeri interi, è chiaro che il secondo deve esser divisibile pel primo; quindi fatto $z = xy$ si avrà

$$x^2 = 36 + y^2,$$

e tutto si ridurrà a trovar un quadrato y^2, che aggiunto al quadrato pari 36 produca un nuovo quadrato x^2, problema sciolto nel principio del *Liber quadratorum*, dal quale ci si porge $y^2 = 64$, $x^2 = 100$, e però $x = 10$, $y = 8$, $z = 80$.

All' occasione delle *Regoluzze* e dei codici che le riferiscono, il signor Boncompagni fa conoscere un' opera inedita di frà Leonardo da Pistoia intitolata *Mathematica.* Questo Leonardo è nominato nel Codice Palatino E. 5. 5. 14, ove s' indicano come segue gli autori *da essere reputati*: « Sono Euclide, Boezio, Jordano. E de' nostri toscani : Lionardo Pisano, Massolo da Perugia, frate Leonardo da Pistoia, maestro Pagolo, le cui ossa sono in Santa Trinita, maestro Antonio Mazzinghi, maestro Giovanni, ed in alcune cose maestro Luca, non lasciando maestro Grazia, frate dell'ordine di Santo Agostino » [2]. Lo nomina anche il Tiraboschi e lo dà come il medesimo che scrisse una *Somma Teologica* e fiorì circa il 1280 [3], ma l'Echard da lui citato lascia la questione indecisa. Al Tiraboschi s'attiene il Libri e soggiunge: « rien n' annonce qu' il eût adopté les nou-

(1) Libri, *Histoire des sc. math. en Italie*, tom. II. pag. 527. — Boncompagni, pag. 389.

(2) Boncompagni, pag. 275.

(3) Tiraboschi, *Storia della letteratura italiana* (Milano, 1823), tom. IV, pagina 254. — Boncompagni, pag. 375.

velles méthodes , ni qu' il eût connu l' algèbre » (1) ; ma intorno a questi particolari possono dar lume i passi pubblicati dal Boncompagni , pei quali vediamo che l' algebra non era compresa nella matematica di frà Leonardo , e che l'aritmetica pratica vi è detta *Algorismus a quodam philosopho qui hanc scientiam edidit sic vocato* (2). Il vocabolo *Algorismo* si suole interpretare (3) nel senso di aritmetica araba o indiana (benchè nel proemio del *Liber Abbaci* abbia manifestamente un altro significato), e il *filosofo così chiamato* potrebbe essere l'arabo algebrista Maommed-Ben-Musa, che essendo nativo della Corasmia iu soprannomato Alkaresmi o Alchuaresmita (4) , e che in un antico manoscritto della biblioteca imperiale di Parigi è indicato con queste parole: *Mahammed filius Moysi Algorismi* (5); e infatti anche l' illustre orientalista Reinaud assegna questa origine alla voce *Algorismo* (6), sebbene paja alquanto singolare che l' autore d' un trattato d' algebra abbia dato il suo nome all'aritmetica pratica. Avrebbe dunque Leonardo da Pistoja seguiti nell' esporla i nuovi metodi arabi o indiani. In altre opere si afferma , che algorismo deriva da *Algus*, nome d' un filosofo (non si sa quale); Wallis e Schoner traggono la stessa voce dalla greca *arithmos* (7), e altre etimologie sono proposte nella *Enciclopedia* del Pomba e nel *Vocabolario* del Tramater.

Le ricerche del Boncompagni che abbiamo dianzi epilogate, e ch'egli promette di continuare e ampliare, saranno

(1) *Histoire*, ecc., tom. II, pag. 44.

(2) Boncompagni, pag. 373.

(3) Chasles, *Aperçu historique*, pag. 528. — Peacock, *Arithmetic*, articoli 59 e 132.

(4) Cossali, *Origine*, ecc. *dell' algebra*, vol. I, pag. 174.

(5) *Comptes rendus*, tom. XIII. pag. 506.

(6) Terquem, *Nouv. Ann. de mathém.*, 1854, pag. 267.

(7) Chasles e Peacock, loc. cit. — Cossali, vol. I, pag. 192.

di grande ajuto alla storia dell' aritmetica e dell' algebra. Maraviglioso è il numero delle opere a stampa e a penna da lui consultate, e nelle conchiusioni che da' suoi raffronti deduce, procede con sì scrupolosa esattezza che riesce a giustificare con molti esempi quella sentenza: potersi talvolta recare nelle verità morali la medesima evidenza che nelle matematiche.

Lo stesso amore dell' esattezza lo condusse a dare una seconda edizione degli *Opuscoli* di Leonardo Pisano, deturpati nella prima da non pochi errori tipografici, e dall'ommissione d' alcune postille e figure marginali. A tali infedeltà è ora riparato per le cure del dotto editore, che inoltre arricchì la ristampa d'una sua prefazione e d'alcuni *fac-simile*, e vi aggiunse o modificò parecchie note. Terremo discorso in un secondo articolo della materia di questi opuscoli e d'alcune questioni di storia che ad essi si legano, e qui ci restringeremo a notare alquante non esatte asserzioni sfuggite al professore O. Terquem (acuto geometra, benemerito della scienza e degli studi) in una sua sposizione o commento, del resto assai lodevole, de' medesimi opuscoli ch'egli pubblicò nel *Bullettino matematico* del giornale *Nouvelles Annales de mathématiques* (1855 e 1856) e che fu ristampato negli *Annali di scienze matematiche e fisiche* (Roma, 1856).

Non ci fermeremo a discutere se il cognome di Leonardo si debba scrivere *Bonacci* col signor Terquem [1] o *Fibonacci* col Libri e altri molti, nè se il soprannome di *Bighellone*, che a Leonardo diedero i suoi contemporanei, sia veramente, come il Terquem presume, sinonimo di *Bonaccio*, nome del padre suo.

[1] *Bulletin mathém.*, tom. I, pag. 174. Lo stesso Terquem devia da questa regola nel proseguimento del suo articolo.

Non chiederemo le prove di quell'asserzione ([1]): «il est certain que notre géomètre (Leonardo Pisano) était á Pise en 1225, *lors du passage de l'empereur Frédéric II*; » e non faremo chiose a quell'altra ([2]) che *consolare* in italiano significhi *aider quelqu'un*, spiegazione con cui egli si sforza di chiarire perchè i nostri antichi aritmetici dicessero *consolamina monetarum* le leghe de' metalli. E solo alla sfuggita noteremo che ciò ch'egli chiama *secondo scritto* di Leonardo non è intitolato *De Avibus* ([3]), ma non porta titolo alcuno, e che le parole *Explicit prologus, incipit tractatus eiusdem*, che seguono la prefazione, o dedicatoria del Flos, non sono un nuovo titolo di questo primo scritto ([4]), ma semplicemente significano come in tante altre opere di que' tempi : Finisce il prologo e comincia il trattato.

Ma non possiamo lasciare inosservato uno strano abbaglio del signor F. Woepcke, ripetuto dal signor Terquem. Si avvide il Woepcke che nel valor prossimo della radice reale d'un'equazione di terzo grado risoluta da Leonardo Pisano era corso un errore, leggendosi indicati 30 *quarta* invece di 33 ; e attribuendo lo svario al copista additava tre altri luoghi ove diceva scontrarsi la medesima sostituzione di 30 a 33. Il Terquem ([5]) ha fatto suo questo appunto, senza aver curato di cercare nel testo i tre luoghi divisati: se li avesse riscontrati avrebbe veduto che in tutti que' tre luoghi (linea 8 e linea 25 della pagina 23, e linea 12 della pagina 24) era stampato per disteso XXX *tertia* e non solamente XXX; onde non vi ha in essi fallo veruno. Del rimanente la or pubblicata ristampa fa chiaro che l'er-

([1]) *Bulletin mathém.*, tom. I. pag. 173.
([2]) B. M. t. II, pag. 53.
([3]) *Ivi*, t. II, pag. 1.
([4]) *Ivi*, t. II, pag. 2.
([5]) *Ivi*, t. II, pag. 5.

rore non era di Leonardo, nè dell' amanuense, poichè vi troviamo a pag. 17: *quarta* XXXIII.

Circa il metodo che potè usar Leonardo per isciogliere la stessa equazione, il Terquem (1) non dubita d'accettare una conghiettura del signor V. A. Lebesgue e di determinare la via che suppone da lui tenuta e che dice seguita più tardi da Vieta. Ma non crediamo che il metodo di Vieta fosse così semplice e poco artifizioso, come quello che il Terquem espone, e questo d'altra parte ci sembra pressochè impraticabile, massime se l'approssimazione si vuole portare tant' oltre quanto l'ha recata Leonardo Pisano. Si trovano appo gli arabi metodi d'approssimazione per risolvere l'equazione cubica da cui dipende la ricerca del *seno* d'un grado; ma senza retrocedere infino a quelli, abbiamo un metodo generale più antico e comodo del metodo di Vieta, ed è la regola aurea immaginata da Gerolamo Cardano: il Terquem ne fece argomento della questione 325 proposta ne' suoi Annali (1856 p. 229), e domandò che alcuno volesse discuterla, non badando che la regola aurea non è altro se non il metodo stesso, che sotto il nome di regola delle parti proporzionali o di falsa posizione, il signor Vielle aveva già discusso nella sua Teorica generale delle approssimazioni numeriche e raccomandato di usare al presente in concorso del Neutoniano.

Nelle opere del Cardano il signor Terquem avrebbe anche trovato alcuni teoremi generali sopra la forma delle radici d'un' equazione cubica che avrebbe potuto mettere a confronto con quelli del signor Lebesgue e in cui sono comprese le proposizioni particolari dimostrate da Leonardo Pisano. Tali teoremi generali, che il Cossali ha raccolti nella sua Storia dell' Algebra, si leggono nel libro *De Re-*

(1) B. M., t. II, pag. 5 e 6.

gula Aliza [1]. A questo proposito il signor Terquem [2] specifica quali siano gl'irrazionali contemplati nel libro X d' Euclide, ma erra noverando fra essi l'espressione

$$\sqrt{(\alpha + \beta\sqrt{m} + y\sqrt{n})},$$

che non fu da Euclide considerata, eccettochè nel caso di α nullo.

Erra eziandio dove afferma [3] non essere applicabile generalmente una regola per lo scioglimento di certe equazioni di primo grado data da Leonardo come generale: *inveni hanc generalem* (*Opuscoli*, p. 28). Leonardo prescrive di formar una delle incognite coll' aggiungere l' unità alla somma di più numeri pari che possiam rappresentare con

$$4,\ 6,\ \ldots\ 2a + 2,$$

intendendo per a un numero intero cognito, da lui detto *numerus multiplicitatis*. Il signor Terquem oppone che *cette progression arithmétique n' est applicable que pour ce cas-là*, cioè per $a = 4$, e come espressione generale dell' incognita

(1) Alla fine di questo libro si trova un esempio di *calcolo algebrico* che credo non sia stato ancora avvertito. Per indicare il quoziente di due quantità cognite, ma indeterminate, il Cardano scrive $\frac{a}{b}$, e poscia volendo la radice del medesimo quoziente, che dinota con ℞ $\frac{a}{b}$ estrae simbolicamente la radice dal numeratore e dal denominatore e scrive $\frac{℞ a}{℞ b}$. Ecco operazioni eseguite *simbolicamente* sopra lettere e denotate con simboli algebrici: della quale importante novazione molti fanno inventore il francese Vieta.

(2) *Bulletin mathématique*, tom. II, pag. 9.

(3) *Ivi*, tom. II, pag. 48.

scrive il trinomio

$$a^2 + 3a + 1.$$

Ora la somma della riferita progressione aumentata di 1, forma appunto questo trinomio. Certamente la regola di Leonardo non varrebbe se a fosse una frazione, ma egli parlò d' una relazione di *moltiplicità*, il che rende a intero e assolve da ogni eccezione la sua regola.

Rispetto ad un altro problema il Terquem ([1]) reca 105 pel valore della terza incognita come sta nel testo, ma qui v' ha senza dubbio un errore di copia, poichè il calcolo dà 125 e non 105.

Più lungi ([2]) riprende come erronei i computi di Leonardo, non avendo ben considerato il suo modo di scrivere i numeri composti di più frazioni, modo preso dagli Arabi. L'espressione

$$\frac{3}{7}\frac{87}{103}6 \quad (\textit{Opuscoli}, \text{ pag. } 52)$$

significa

$$6 + \frac{87}{103} + \frac{3}{7.103},$$

dovendosi leggere da destra a sinistra, e moltiplicare ogni denominatore per quello che lo precede; essa pertanto equivale a

$$6 + \frac{612}{721} \quad \text{ossia} \quad \frac{4938}{721}$$

valori posti dal signor Terquem. V'ha bensì errore non so se di stampa o copia, nell'espressione della seconda incognita che dev'essere

([1]) *Bulletin mathématique*, tom. II, pag. 51.

([2]) *Ivi*, pag. 58.

$$\frac{1}{7}\,\frac{31}{103}\,10$$

ossia

$$10 + \frac{31}{103} + \frac{1}{7.103} = 10 + \frac{218}{721}$$

mentre in luogo di $\frac{1}{7}$ la prima edizione ha $\frac{2}{7}$, e la seconda $\frac{3}{7}$. Ma quelle delle altre incognite sono esatte, e ne diamo qui appresso la traduzione:

$$3.^a\ \frac{4}{7}\,\frac{9}{103}\,14 = 14 + \frac{9}{103} + \frac{4}{7.103} = 14 + \frac{67}{721},$$

$$4.^a\ \frac{5}{7}\,\frac{64}{103}\,15 = 15 + \frac{64}{103} + \frac{5}{7.103} = 15 + \frac{453}{721},$$

$$5.^a\ \frac{3}{7}\,\frac{88}{103}\,21 = 21 + \frac{88}{103} + \frac{3}{7.103} = 21 + \frac{619}{721}.$$

Questi valori sono i medesimi che trova il Terquem, eccetto il valore della terza incognita, che secondo lui dovrebb'essere $14 + \frac{43}{721}$; ma qui egli s'inganna, poichè quella incognita si determina col dividere 10161 per 721, onde nasce il quoziente sopra riferito. La stessa scrittura è usata a pag. 54, dove sta

$$\frac{1}{2}\,\frac{148}{197}\,3 \quad \text{in luogo di} \quad 3 + \frac{297}{394},$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{123}{197}\,15 \quad \text{in luogo di} \quad 15 + \frac{247}{394}.$$

Parecchi problemi sono omessi dal signor Terquem, sebbene non manchino d'importanza risultandone che Leo-

nardo possedeva regole generali (modernamente si direbbero formole) per risolvere certe classi di equazioni di primo grado *a qualsivoglia numero d'incognite*. D'altra parte egli ci sembra essere forse andato tropp' oltre quando asserisce ([1]) che Leonardo « possédait virtuellement les formules cramériennes » : le equazioni sciolte dal Fibonacci sono sempre di forme particolari, e la loro risoluzione non presuppone la notizia della formazione generale dei determinanti di Cramer.

Parlando della ricerca di due quadrati la cui somma sia un quadrato, e della soluzione generale di questo problema esposta nel X libro d' Euclide (prop. 29, lemma 1), il signor Terquem ([2]) aggiunge: « cela paraît avoir échappé à tout le monde, excepté à Fibonacci ». Tuttavia è giusto riconoscere che prima della pubblicazione degli opuscoli del Fibonacci, il signor Woepcke aveva citata la soluzione d'Euclide nel suo *Extrait du Fakhri* (Parigi, 1853, pag., 13, e pag. 14 e 31 in nota).

Del tutto inesatto è il sunto che il signor Terquem presenta del metodo tenuto da Leonardo nel problema de'*congrui*, tanto che le espressioni a cui egli giunge sono particolari mentre quelle di Leonardo sono generalissime. Il congruo (che è la differenza comune di tre quadrati equidifferenti) si forma sommando due diverse progressioni di numeri impari, e Leonardo suppone che il numero dei termini d' una progressione e quello dei termini dell' altra debbano avere tra sè una ragione data *a* : *b*, il che può dirsi che aggiunga difficoltà al quesito, ma non ne scema la generalità. Bensì gli toglierebbe generalità se supponesse *a* e *b* due impari consecutivi come vuole il signor Ter-

([1]) *Bulletin mathématique*, t. II, p. 59.
([2]) *Ivi*, t. II, p. 61.

quem [1], ma ciò non è punto vero; e neppure è vero che il Fibonacci « est obligé d' entrer dans de longues discussions amenées pour les cas où $a = 1$ et $a^2 - 2$ devient négatif, et dans des cas fractionnaires il a besoin du premier lemme ». Leonardo distingue le ipotesi di $a + b$ pari e di $a + b$ impari, il che mostra già che non si limita al caso di a e b ambedue impari; inoltre distingue se la ragione di a a b sia maggiore o minore di quella di $b - a$ a $b + a$. Queste sono le sue discussioni, nè gli occorre di preoccuparsi del caso di $a^2 - 2$ negativo, o di trattare altrimenti che come un esempio qualsivoglia il caso di $a = 1$. Il sig. Terquem cita l' esempio di $a = 3$ (per errore certamente tipografico si trova scritto invece $a = 2$), ma più altri ne pone Leonardo, dappoichè i valori numerici da lui successivamente assegnati ad a e b sono 3 e 5, 1 e 3, 1 e 2, 2 e 5, 5 e 7, dei quali parecchi non sono numeri impari consecutivi. Quanto ai *casi frazionarii*, cioè a quelli in cui i quadrati equidifferenti non sono interi, non ricorre al *primo lemma*, sì ad un' altra proposizione omessa dal signor Terquem, e che serve a recare a tutta la possibile generalità la teorica de' congrui, vale a dire che moltiplicando o dividendo un congruo per un quadrato si produce un nuovo congruo (*Opuscoli*, pag. 93 e 94). Del primo lemma, secondo il quale ogni congruo è divisibile per 24 se i tre quadrati equidifferenti sono interi, egli si serve solo per dimostrare che nessun numero minore di 24 può essere congruo di quadrati interi: altra proposizione essenziale.

Segue il teorema, che nessun quadrato può essere congruo, intorno al quale si ripetono dal signor Terquem [2] presso a poco le osservazioni del signor Woepcke. Entrambi trovano difettosa la dimostrazione perchè è omesso il caso

[1] *Bulletin mathématique* t. II, p. 64—66.
[2] *Ivi*, p. 67.

di quattro quadrati delle forme m, n, $m + n$, $m - n$: ma questo caso è appunto quello che più facilmente e senza calcolo veruno si esclude ricorrendo ad un principio usato già da Euclide e da Campano; imperocchè se vi fosse un congruo quadrato, e gli indicati quattro numeri, dal cui prodotto quadruplicato si forma il medesimo congruo, e che però sono tutti minori di questo, fossero quadrati, si avrebbero tre quadrati equidifferenti $m - n$, m, $m + n$, e la loro differenza n sarebbe pure un quadrato; onde da ogni congruo quadrato si dedurrebbe un congruo quadrato più piccolo, e contro all' accennato principio si dovrebbe ammettere una serie infinita di numeri interi decrescenti.

Il signor Terquem prova l' impossibilità dell' equazione

$$mn = m^2 - n^2,$$

il che già fatto avevano Euclide e Campano; poi riguarda come distinte le seguenti due proposizioni: « 1°. Que m, n, $m + n$, $m - n$ ne sont pas des carrés simultanement ; 2°. Que m, n, $m^2 - n^2$ ne peuvent être des carrés. » Ora la seconda trae con sè manifestamente la prima, e anche la prima basta ad indurre la seconda quando si supponga come è possibile che i quattro nnmeri siano contra sè primi. Indi soggiunge : « Cela ne peut se démontrer que par le théorème de Fermat sur les bicarrés auquel Fibonacci n' a nullement pensé; on a eu tort de lui en attribuer la connaissance. » Non crediamo sia lecito in verun caso d' asserire che una proposizione di matematica non può dimostrarsi se non nel tale o tal altro modo: e rispetto a quella di Leonardo Pisano, che un congruo, ovvero (che e lo stesso) l' area d' un triangolo rettangolo in numeri non è mai un quadrato, fu dimostrata son già due secoli da Frenicle senza il teorema di Fermat relativo ai biquadrati, nel suo trattato de' triangoli rettangoli, ove quel teorema

di Fermat è poi dedotto come un semplice corollario del primo. Del resto la connessione di questi due teoremi è sì stretta che posto l'uno, ne discende immediatamente l'altro, onde non sarebbe meraviglia che Leonardo Pisano avesse pensato anche al secondo, sebbene non ci sia noto, che alcuno gliene abbia veramente attribuita la positiva notizia.

Non possiamo astenerci da un' ultima osservazione. Il signor Terquem ascrive sempre all' algebra indeterminata que' problemi di Leonardo Pisano in cui sono determinate soltanto le ragioni delle incognite, non essendovi nelle equazioni alcun termine affatto cognito, e nello stesso modo considera (1) un altro problema d'egual natura sciolto da Jamblico, matematico greco del quarto secolo. A rigor di termini egli ha ragione; quantunque tali problemi si trattino coi soli metodi dell' algebra determinata, senza punto ricorrere a quegli artifizi e procedimenti speciali che sono propri della indeterminata. Ma crediamo che egli ne esageri il valore, nè sappiam vedere che il problema di Jamblico debba porsi fra le *questions importantes pour l'histoire de la science* : quando tutto si riduce ad aggiungere un nuovo dato per rendere determinata la questione, oppure a vedere che un'equazione della forma $ay = bx$ si verifichi col prendere $x = a$, $y = b$. Speculazioni ben più sottili, e più intimamente spettanti all' *Analisi indeterminata* troviamo nei libri 7-10 degli *Elementi* d' Euclide, onde non ci sembra che dal problema di Jamblico debba venir accresciuta la fama de' geometri greci, nè che da esso sia rivelato « que les Grecs s' occupaient d' *analyse indéterminée* avant Diophante. » Non importa che Euclide faccia uso di figure e dimostrazioni geometriche, perciocchè anche il Fibonacci spiega con figure le proposizioni del *Liber quadratorum*, e ciò non toglie che questo suo trattato appartenga all'analisi

(1) B. M., tom. I, p. 189.

indeterminata. Reca più meraviglia che il signor Terquem ([1]) dichiari *probabile* che Diofanto abbia dato eziandio le equazioni di primo grado, e che questa parte dell' opera sua sia perita, aggiungendo : « Il est assez singulier que ce soit la partie la plus facile qui se soit perdue. È noto che Diofanto suole proporsi di trovar soluzioni razionali senza curare se siano o no intere ; onde potrebbe aver taciuto delle equazioni di primo grado le cui soluzioni sono già per sè stesse razionali, senza che la loro mancanza bastasse a far sospettare uno smarrimento. Ma il fatto si è che molti problemi di primo grado ci sono stati conservati nell'opera di Diofanto: tali sono la maggior parte delle questioni del primo libro e le questioni 18 e 19 del secondo, e alcune di esse porgono, come il problema di Jamblico, equazioni senza termine cognito, che Diofanto scioglie introducendo un nuovo dato, e rendendo poi interi i valori ottenuti delle incognite col togliere il denominatore comune: tali sono le questioni 26, 27, e 28 del libro primo. Quanto a Leonardo Pisano, l'analisi indeterminata gli deve, oltre al trattato dei numeri quadrati, la risoluzione di non poche equazioni *complete* di primo grado a due e più incognite a cui guidano le questioni *avium et similium* pubblicate dal Boncompagni, e altre più notabili nella parte inedita del *Liber Abbaci*.

([1]) B. M., t. I, pag. 190.

RIDUZIONE D'UN INTEGRALE MULTIPLO.

NOTA

DI ANGELO GENOCCHI.

Sia

$$P = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \dots, \quad Q = \alpha x + \beta y + \dots,$$

$f(P, Q)$ una data funzione di P e Q, e si debba determinare l'integrale multiplo.

$$S = \int f(P, Q) dx dy dz \dots$$

steso a tutti i valori positivi e negativi delle n variabili x, y, z, . . . che possono rendere

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \dots < 1 .$$

Userò il metodo del Dirichlet, ampliato dai signori Catalan, Cayley, Schloemilch ([1]), dal quale non è diverso il metodo dei *coefficienti restrittori* proposto dal Cauchy, ([2]); e dovendo per la condizione dei limiti, P esser positivo, e Q variare tra $-\infty$ e $+\infty$, porrò secondo il teorema di Fourier

$$e^{-kP} f(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_0^{\infty} e^{-k\theta} f(\theta, Q) \, e^{(\theta - P) v \sqrt{(-1)}} d\theta ,$$

$$f(\theta, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\tau - Q) u \sqrt{(-1)}} f(\theta, \tau) d\tau ,$$

([1]) *Journal de Liouville*, T. VIII, p. 239, e T. XIII, p. 246. — Schloemilch, *Analytische Studien* (Lipsia 1848), vol. II, pag. 160.

([2]) *Comptes rendus*, t. 37, p. 150—156.

dove k rappresenta una costante positiva. Tratta di qui e sostituita in S l'espressione di $f(P,Q)$, si potranno stendere le variabili x, y, z, ... da $-\infty$ a $+\infty$, poichè saranno annullati gli elementi dell'integrale multiplo nè quali P non sarà positivo; e quindi, fatto $k - v\sqrt{(-1)} = w$, avremo

$$S =$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta w} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau u\sqrt{(-1)}} f(\theta,\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{Pw - Qu\sqrt{(-1)}} dx dy dz \ldots$$

Ma essendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \alpha u x\sqrt{(-1)}} dx = a\sqrt{\frac{\pi}{w}}\, e^{-\frac{a^2\alpha^2 u^2}{4w}},$$

posto

$$\mu = abc \ldots, \quad r^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 \ldots,$$

si troverà

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{Pw - Qu\sqrt{(-1)}} dx dy dz \ldots = \mu \left(\frac{\pi}{w}\right)^{\frac{1}{2}n} e^{w - \frac{r^2 u^2}{4w}},$$

d'altra parte è

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r^2 u^2}{4w}} e^{\tau u\sqrt{(-1)}} du = \frac{2}{r} \sqrt{(\pi\omega)}\, e^{-\frac{\tau^2}{r^2}w} :$$

dunque sostituendo e mutando l'ordine delle integrazione,

$$S = \frac{\mu}{2r\pi} \pi^{\frac{n-1}{2}} \int_0^{\infty} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta,\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(1-\theta-\frac{\tau^2}{r^2}\right)w} w^{-\frac{n-1}{2}} dv .$$

Ora supponendo $\varphi(t) = e^{-kt} t^{m-1}$, e integrando rispetto a t, si ha

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t-s)v\sqrt{(-1)}} \varphi(t) dt = \frac{\Gamma(m)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sv\sqrt{(-1)}} \frac{dv}{[k - v\sqrt{(-1)}]^m},$$

laonde pel teorema di Fourier quest'ultimo integrale eguaglierà $e^{-ks}s^{m-1}$ se s è positivo altrimenti sarà nullo. Da ciò segue che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(1-\theta-\frac{\tau^2}{r^2}\right)w} w^{-\frac{n-1}{2}} dv$$

eguaglia

$$\frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1-\theta-\frac{\tau^2}{r^2}\right)^{\frac{n-3}{2}}$$

se $\theta+\frac{\tau^2}{r^2}<1$, altrimenti è nullo. Dunque infine

$$S=\frac{\mu}{r}\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\iint f(\theta,\tau)\left(1-\theta-\frac{\tau^2}{r^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} d\theta d\tau$$

perchè questo integrale duplicato si stenda ai valori positivi di θ e tanto positivi quanto negativi di τ che soddisfaranno alla condizione $\theta+\frac{\tau^2}{r^2}<1$.

Se le variabili x, y, z, . . . dovessero verificare anche l'ineguaglianza $A<Q<B$, i limiti di τ sarebbero A e B, e si avrebbero le tre condizioni

$$\theta+\frac{\tau^2}{r^2}<1,\ \theta>0,\ A<\tau<B\ .$$

Se poi quelle variabili fossero soggette alla sola condizione $A<Q<B$; i limiti di τ sarebbero A e B, ma θ potrebbe stendersi da $-\infty$ a $+\infty$, onde si avrebbe solamente

$$\theta+\frac{\tau^2}{r^2}<1,\ A<\tau<B\ .$$

Del resto sarà facile sostituire a θ e τ altre variabili per cui le integrazioni sieno da farsi tra limiti costanti. Né ragguagli (*Baricket*) dell'Acc. R. di Sassonia il sig. Schloemilch ha ottenuto recentemente queste riduzioni pel caso particolare di $f(P,Q) = F(P)\ \varphi(Q)$.

Nel caso di $A < Q < B$, si potrà sostituire a θ un'altra variabile u ponendo

$$1-\theta-\frac{\tau^2}{r^2}=\frac{\tau^2}{r^2}u, \quad d\theta=-\frac{\tau^2}{r^2}du,$$

e si avrà $u > 0$, $A < \tau < B$, talche sarà

$$S=\frac{\mu}{r^2}\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_A^B \tau^{n-1}d\tau\int_0^\infty f(\theta,\tau)u^{\frac{n-3}{2}}du$$

dove

$$\theta=1-\frac{\tau^2}{r^2}(1+u).$$

Sia per esempio

$$f(\theta,\tau)=e^{-(1-\theta)}F(\tau):$$

avremo

$$\int_0^\infty f(\theta,\tau)\ u^{\frac{n-3}{2}}du=F(\tau)e^{-\frac{\tau^2}{r^2}}\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{r^2}u}\ u^{\frac{n-3}{2}}du$$

$$=F(\tau)\,e^{-\frac{\tau^2}{r^2}}\left(\frac{r}{\tau}\right)^{n-1}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right),$$

e quindi

$$S=\frac{\mu}{r}\,\pi^{\frac{n-1}{2}}\int_A^B e^{-\frac{\tau^2}{r^2}}\,F(\tau)d\tau.$$

Sia ancora

$$f(\theta,\tau)=\frac{F(\tau)}{(k+1-\theta)^m}:$$

troveremo

$$\int_0^\infty f(\theta,\tau)\, u^{\frac{n-3}{2}} du = \mathrm{F}(\tau)\int_0^\infty \frac{u^{\frac{n-3}{2}}\, du}{\left[k + \frac{\tau^2}{r^2}(1+u)\right]^m}$$

$$= \mathrm{F}(\tau)\left(\frac{r}{\tau}\right)^{n-1}\left(\frac{r^2}{kr^2+\tau^2}\right)^{m-\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(m)}\,\Gamma\left(m-\frac{n-1}{2}\right),$$

e però

$$\mathrm{S} = \mu r^{2m-n}\frac{\Gamma\left(m-\frac{n-1}{2}\right)\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(m)}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\mathrm{F}(\tau)d\tau}{(kr^2+\tau^2)^{m-\frac{n-1}{2}}}$$

Queste due formole mostrano che il valore di due integrali multipli dato dal sig. Schloemilch a pag. 333 e 334 del T. III di questi Annali, equazioni (5) e (6), è doppio del vero. Il suo errore deriva dall'uso del fattore discontinuo

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-usi} du \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{F}(t)\cos ut dt,$$

che prende il medesimo valore per s e per $-s$, e quindi non è sempre nullo fuori dei limiti $s = \mathrm{A}$ e $s = \mathrm{B}$, se s é una funzione che può cambiar segno.

Le dette equazioni (5) e (6) collimano con le (4) e (5) delle pag. 177 e 179 degli *Studi Analitici* del medesimo autore, vol. II. Anche l'equazione (8), pag. 181, di questo vol. II, deve per egual motivo emendarsi togliendo dal secondo membro il fattore 2; e cessa la singolarità ivi notata per cui tali equazioni supposte vere nel caso di più variabili non valevano in quello d'una variabile sola.

INTORNO AD UNA SOMMA DI DERIVATE SUCCESSIVE:

NOTA

DEL SIG. ANGELO GENOCCHI.

Nei *Comptes rendus* dell'Accademia delle Scienze di Parigi. 1°. giugno 1857, il Sig. *Haton de la Goupillière*, cercando la somma

$$z=y+\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}+\ldots+\frac{d^{mn}y}{dx^{mn}},$$

lrae da questa equazione

$$z-\frac{d^nz}{dx^n}=y-\frac{d^{(m+1)n}y}{dx^{(m+1)n}}=\mathrm{Y}\ .$$

Ora Eulero integrò l'equazione

$$\mathrm{X}=a^ny-\frac{d^ny}{dx^n},$$

e trovò un integrale che può rappresentarsi con

$$y=\sum\frac{-2e^{axcos\theta}}{na^{n-1}}\Big[\cos(\theta+ax\mathrm{sen}\theta)\int e^{-axcos\theta}\mathrm{X}dx\cos(ax\mathrm{sen}\theta)$$
$$+\mathrm{sen}(\theta+ax\mathrm{sen}\theta)\int e^{-axcos\theta}\,\mathrm{X}dx\mathrm{sen}(ax\mathrm{sen}\theta)\Big]$$

intendendo stessa la somma Σ à tutti i valori di θ moltiplici di $\frac{2\pi}{n}$ non maggiori di π e presa la metà sola dei termini corrispondenti a $\theta=0$ e $\theta=\pi$ (*Inst. Calc. Integr. Petropoli* 1769, vol. II, p. 453). Posto

$$\sqrt{(-1)}=i,\ \cos\theta+i\mathrm{sen}\theta=\rho,\ \cos\theta-i\mathrm{sen}\theta=\rho';$$

quella espressione diviene

$$y = \frac{-1}{na^{n-1}} \sum \left[e^{\theta i} e^{ax\rho} \int e^{-ax\rho} X dx + e^{-\theta i} e^{ax\rho'} \int e^{-ax\rho'} X dx \right]$$

e supponendo

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}$$

si riduce ad

$$y = \frac{-1}{na^{n-1}} \sum_{k=1}^{k=n} \left(e^{a\rho x} \rho \int e^{-a\rho x} X dx \right),$$

poichè col cambiare θ in $2\pi - \theta$ si cambia ρ' in ρ. Di più, mettendo in evidenza le n costanti arbitrarie C_k racchiuse negli integrali indefiniti, si potrà scrivere

$$y = \sum_{k=1}^{k=n} (C_k e^{a\rho x}) - \frac{1}{na^{n-1}} \sum_{k=1}^{k=n} \left(e^{a\rho x} \rho \int_{x_0}^{x} e^{-a\rho x} X dx \right)$$

donde mutando X in Y, y in z, e facendo $a = 1$, si trae un' espressione di z data dal sig. Haton (*Comptes rendus*, t. 44, p. 1147).

Si può anche fare

$$y = v + \frac{dv}{dx} + \frac{d^2 v}{dx^2} + \ldots + \frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}},$$

donde risulta

$$z = v + \frac{dv}{dx} + \ldots + \frac{d^r v}{dx^r},$$

posto $r = (m+1)n - 1$; allora si avrà l'equazione di primo ordine

$$z - \frac{dz}{dx} = v - \frac{d^{r+1} v}{dx^{r+1}} = w,$$

che subito s'integra e porge

$$z = -e^{x}\int e^{-x} w dx \quad ,$$

e nel medesimo tempo si avrà

$$Y = w + \frac{dw}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} + \ldots + \frac{d^{n-1} w}{dx^{n-1}} ,$$

equazione dell' ordine $n-1$. Anche questa fu integrata da Eulero che trovò

$$w =$$

$$\frac{-4}{n}\sum e^{x\cos\theta} \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta\Big[\operatorname{sen}\Big(\frac{3}{2}\theta + x\operatorname{sen}\theta\Big)\int e^{-x\cos\theta} Y dx \cos(x\operatorname{sen}\theta)$$

$$- \cos\Big(\frac{3}{2}\theta + x\operatorname{sen}\theta\Big)\int e^{-x\cos\theta} Y dx \operatorname{sen}\big(x\operatorname{sen}\theta\big)\Big] ,$$

stesa Σ a tutti i valori di θ moltiplici di $\frac{2\pi}{n}$ e non maggiori di π, e ridotto alla metà il termine corrispondente a $\theta = \pi$ (loc. cit. p. 455) : questo integrale si ridurrà facilmente a

$$w = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\Big[\rho(1-\rho)e^{\rho x}\int e^{-\rho x} Y dx\Big] ,$$

dove è come dianzi

$$\rho = e^{\theta i} ,\ \theta = \frac{2k\pi}{n} .$$

Adunque

$$z = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\Big[\rho(1-\rho)\, e^{x}\int e^{-(1-\rho)x} V dx\Big] ,$$

fatto

$$\int e^{-\rho x} Y dx = V \ ; \quad \text{ma} \quad \frac{dV}{dx} = e^{-\rho x} Y ,$$

$$(1-\rho)\int e^{-(1-\rho)x} V dx = -V e^{-(1-\rho)x} + \int e^{-x} Y dx , \quad \sum_{k=1}^{k=n}\rho = 0 :$$

dunque

$$z = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\rho e^{\rho x}\int e^{-\rho x}\,\mathrm{Y}dx\right),$$

che collima con un'espressione già ottenuta.

Ma restano sempre a determinarsi le n costanti, mentre v' ha un modo semplicissimo per giungere immediatamente alla formola finale. Posto λ costante,

$$y + \lambda\frac{dy}{dx} + \lambda^2\frac{d^2y}{dx} + \ldots + \lambda^s\frac{d^sy}{dx^s} = f(\lambda,x),$$

e integrando per parti, si trova

$$-\frac{1}{\lambda}\int_{x_0}^{x} e^{-\frac{x}{\lambda}}\,y dx = e^{-\frac{x}{\lambda}}f(\lambda,x) - e^{-\frac{x_0}{\lambda}}f(\lambda,x_0)$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_{x_0}^{x} e^{-\frac{x}{\lambda}}\lambda^{s+1}\frac{d^{s+1}y}{dx^{s+1}}\,dx,$$

equazione non punto diversa da quella che ho riferita in questi *Annali*, 1855, p. 94; quindi

$$f(\lambda,x) = e^{\frac{x-x_0}{\lambda}}f(\lambda,x_0) - \frac{1}{\lambda}e^{\frac{x}{\lambda}}\int_{x_0}^{x} e^{-\frac{x}{\lambda}}\left(y - \lambda^{s+1}\frac{d^{s+1}y}{dx^{s+1}}\right)dx.$$

Si prenda $\lambda = \frac{1}{\rho}$, conservando a ρ il significato precedente: se ne trarrà

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{1}{\rho},\ x\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\left[e^{\rho(x-x_0)}f\left(\frac{1}{\rho},\ x_0\right)\right.$$

$$\left.-\ \rho e^{\rho x}\int_{x_0}^{x} e^{-\rho x}\left(y - \rho^{-s-1}\frac{d^{s+1}y}{dx^{s+1}}\right)dx\right],$$

e il primo membro si ridurrà alla somma cercata z per tutti i valori

$$s = mn,\ mn+1,\ mn+2,\ \ldots\ mn+n-1\ ,$$

poichè generalmente il valore di

$$\sum_{k=1}^{k=n} \rho^{-h}$$

è n se h è moltiplice di n, è zero se h è intero ma non moltiplice di n. Supponendo $s = mn + n - 1$ si otterrà la formula ultima del Sig. Haton (l. c. p. 1148), che però é un caso particolare della nostra e che ci risulta senza bisogno dei non pochi artificii e calcoli da lui usati; ma si avrà un'espressione più semplice prendendo $s = mn$, perché $f\left(\frac{1}{\rho},\ x_0\right)$ conterrà minor numero di termini.

Se s si suppone infinito e si fa $y = \varphi(x)$, si avrà (*Annali*, 1855, p. 114)

$$f(\lambda,x) = \int_0^\infty e^{-z}\varphi(x+\lambda z)dz\ ,$$

purchè le serie siano convergenti: quindi

$$y + \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} + \frac{d^{3n} y}{dx^{3n}} + \ldots = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^\infty e^{-z}\varphi\left(x+\frac{z}{\rho}\right)dx\ .$$

A problema reciproco sarà l'integrazione dell'equazione differenziale d'ordine infinito

$$X = y + \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} + \frac{d^{3n} y}{dx^{3n}} + \ldots\ ,$$

ora dovendo il secondo membro essere una serie convergente, se ne potrà dedurre coll'integrazione ripetuta

$$\int^n X dx^n = \int^n y dx^n + y + \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} + \ldots$$

e perciò sarà

$$\int^n X dx^n = \int^n y dx^n + X,$$

donde differenziando

$$y = X - \frac{d^n X}{dx^n}.$$

Questo valore di y porge

$$y + \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} + \ldots + \frac{d^{(m-1)n} y}{dx^{(m-1)n}} = X - \frac{d^{mn} X}{dx^{mn}},$$

e quindi un tal valore soddisfarà veramente all'equazione proposta se la derivata $\frac{d^{mn} X}{dx^{mn}}$ avrà per limite zero mentre m cresce in infinito: ammesso che questa condizione si adempia per tutti i valori di x compresi tra due limiti determinanti $x = x_0$, $x = x_n$, saranno x_0 e x_n i limiti della convergenza della serie proposta, ed entro il medesimo intervallo si avrà semplicemente $y = X - \frac{d^n X}{dx^n}$. Sia $F(x)$ una funzione arbitraria di x che non divenga mai infinita da $x = x_0$ ad $x = x_n$; sia χ un coefficiente discontinuo, che resti sempre nullo in questo intervallo e che fuori di esso sia uguale all'unità: potremo scrivere generalmente

$$y = X - \frac{d^n X}{dx^n} + \chi . F(x),$$

e sarà questo l'integrale completo della proposta equazione Se la condizione lim. $\frac{d^{mn} X}{dx^{mn}} = 0$ non è adempita per alcun valore di x, l'equazione proposta non avrà integrale perchè non potendo mai esser convergente la serie che contiene, essa non avrà senso; se quella condizione è adempita per tutti i possibili valori di x, l'integrale completo non potrà

esser altro che

$$y = X - \frac{d^n X}{dx^n}.$$

Se $X = 0$, la proposta non potrà avere altro integrale completo che $y = 0$.

Nel caso di $n = 1$, Eulero giunse ad integrali che contengono un infinità di costanti arbitrarie, ma le sue formole sono inesatte (*Annali*, 1855, p. 112): passando da un ordine finito ad un ordine infinito, egli tralascia un'infinità di termini di cui ciascuno è infinitesimo senza assicurarsi che il loro aggregato sia pure evanescente.

Vediamo pertanto darsi equazioni differenziali che finchè restano d'un ordine finito s debbono ammettere s costanti arbitrarie nel loro integrale completo, e possono perderle tutte quando s diventa infinito. La condizione della convergenza è quella che restringe la forma della funzione domandata.

Ne abbiamo un esempio semplice nell'altra equazione d'ordine infinito

$$X = y + \frac{h}{1}\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \dots,$$

da cui fatto $y = \varphi(x)$, $X = f(x)$ si deduce solamente

$$f(x) = \varphi(x + h), \; f(x - h) = \varphi(x),$$

talchè l'integrale completo fra i limiti nei quali, essendo convergente la serie, ha un senso l'equazione proposta, sarebbe $y = f(x - h)$ senza alcuna arbitraria.

Un fatto simile si presenta nelle equazioni algebriche che possono perdere ogni radice reale e immaginaria se il loro grado diventa infinito: così l'equazione

$$x + x^2 + x^3 + \dots = a$$

non ha senso se il modulo di x non è < 1, e allora si

riduce ad $\frac{x}{1-x}=a$, talchè ha una sola radice $x=\frac{a}{1+a}$ quando il modulo di $\frac{a}{1+a}$ è inferiore all'unità, altrimenti non ne ha veruna.

Trattando coll'integrazione per parti l'integrale a differenze finite $\Sigma a^x y$, e supponendo

$$\Delta x = h,\ \frac{a^h}{1-a^h}=\lambda\ ,$$

si troverà

$$(a^h-1)\Sigma a^x y = [y + \lambda\Delta y + \lambda^2\Delta^2 y + \ \dots\ + \lambda^s\Delta^s y]a^x - \lambda^s\Sigma a^{x+h}\Delta^{s+1}y\ ,$$

donde si potranno dedurre per le somme di differenze formole simili a quelle che abbiamo sopra ottenute per le somme di derivate.

INTORNO AD ALCUNE PROPRIETA' DELLE SUPERFICIE A LINEE DI CURVATURA PIANE O SFERICHE.

NOTA

DEL PROF. F. BRIOSCHI.

1. Le prime ricerche intorno alle superficie di cui le linee di curvatura sono piane si devono a Monge, il quale nel §. XVII della Application de l'Analyse ec. determinava la classe di superficie che hanno le linee di una curvatura situate in piani paralleli. In seguito (Crelle T. 30) Joachimsthal considerava le superficie per le quali le linee di una curvatura sono poste in piani passanti per una retta, e più di recente i sig. Bonnet e Serret presentavano varie memorie all'Accademia delle Scienze (Comptes Rendus 1853; Journal de l'Ecole Polytecnique. Cahier 34-35; Journal de Liouville T. 18) nelle quali vengono discussi tutti i casi di superficie di cui le linee delle due curvature sono piane; o quelle dell'una curvatura piane e quelle dell'altra sferiche od ambedue sferiche [1]. Ma l'essere piane o sferiche le linee di una curvatusa è in molti casi conseguenza necessaria di disposizioni particolari dei piani e delle sfere che contengono le linee dell'altra curvatura; come ha mostrato a posteriori il sig. Bonnet pel caso particolare del Joachimsthal; per il che credo di di qualche interesse le formole seguenti le quali dimostrano a priori la esistenza di queste relazioni fra le linee di curvatura, e sono anche utili nella ricerca di proprietà delle superficie a linee di curvatura piane o sferiche.

[1] Il sig. Bonnet ha però considerato anche il caso delle superficie nelle quali le linee di curvatura di un solo sistema sono piane o sferiche.

2. Sieno x, y, z le coordinate di un punto di una superficie le quali si ritengano funzioni di due variabili indipendenti u, v. Posto:

$$(1)\begin{cases} E=\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2, \quad G=\left(\frac{dx}{dv}\right)^2+\left(\frac{dy}{dv}\right)^2+\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 \\ A=\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv}-\frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}, \quad B=\frac{dz}{du}\frac{dx}{dv}-\frac{dz}{dv}\frac{dx}{du}, \\ C=\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du} \end{cases}$$

Se le linee u=cost.^{e}, v=cost.^{e} sono linee di curvatura della superficie si hanno le:

$$(2)\begin{cases} A\frac{d^2x}{dudv}+B\frac{d^2y}{dudv}+C\frac{d^2z}{dudv}=0, \\ \frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}+\frac{dy}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dz}{du}\frac{dz}{dv}=0; \end{cases}$$

ma dalle (1) si deducono le:

$$\frac{1}{2}\frac{dE}{dv}=\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{dudv}+\frac{dy}{du}\frac{d^2y}{dudv}+\frac{dz}{du}\frac{d^2z}{dudv}$$

$$\frac{1}{2}\frac{dG}{du}=\frac{dx}{dv}\frac{d^2x}{dudv}+\frac{dy}{dv}\frac{d^2y}{dudv}+\frac{dz}{dv}\frac{d^2z}{dudv}$$

per le quali e la prima delle (2) risultano:

$$(3)\begin{cases} \frac{d^2x}{dudv}=\frac{1}{2E}\frac{dE}{dv}\frac{dx}{du}+\frac{1}{2G}\frac{dG}{du}\frac{dx}{dv} \\ \frac{d^2y}{dudv}=\frac{1}{2E}\frac{dE}{dv}\frac{dy}{du}+\frac{1}{2G}\frac{dG}{du}\frac{dy}{dv} \\ \frac{d^2z}{dudv}=\frac{1}{2E}\frac{dE}{dv}\frac{dz}{du}+\frac{1}{2G}\frac{dG}{du}\frac{dz}{dv} \end{cases}$$

Si indichino con a, b, c i coseni degli angoli che la normale alla superficie al punto di coordinate x, y, z forma coi tre assi, e con R_u, R_v i raggi di curvatura della superficie corrispondenti alle linee $u=$cost.^{e} $v=$cost.^{e} Dalle relazioni [1]:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{da}{dv}=-\dfrac{1}{R_u}\dfrac{dx}{dv}, & \dfrac{db}{dv}=-\dfrac{1}{R_u}\dfrac{dy}{dv}, \quad \dfrac{dc}{dv}=-\dfrac{1}{R_u}\dfrac{dz}{dv} \\ \dfrac{da}{du}=-\dfrac{1}{R_v}\dfrac{dx}{du}, & \dfrac{db}{du}=-\dfrac{1}{R_v}\dfrac{dy}{du}, \quad \dfrac{dc}{du}=-\dfrac{1}{R_u}\dfrac{dz}{du} \end{cases}$$

si deducono le due seguenti [2]

$$\frac{1}{2R_u\sqrt{E}}\frac{dE}{dv}=\left(\frac{\sqrt{E}}{R_v}\right)'_v, \qquad \frac{1}{2R_v\sqrt{G}}\frac{dG}{du}=-\left(\frac{\sqrt{G}}{R_u}\right)'_u$$

e ponendo per brevità:

$$(5)\quad \frac{1}{2\sqrt{(EG)}}\frac{dE}{dv}=\omega, \quad \frac{1}{2\sqrt{(EG)}}\frac{dG}{du}=\theta, \quad \frac{\sqrt{E}}{R_v}=M, \quad \frac{\sqrt{G}}{R_u}=N$$

$$(6)\qquad \frac{dM}{dv}=\omega N, \quad \frac{dN}{du}=\theta M$$

alle quali possiamo aggiungere la formola di Gauss:

$$(7)\qquad -MN=\frac{d\omega}{dv}+\frac{d\theta}{du}.$$

3. Le linee $v=$cost.^{e} sieno piane, ed:

$$lx+my+nz=\varphi,$$

dove l, m, n, φ sono funzioni di v ed $l^2+m^2+n^2=1$ Sia la equazione di uno qualunque dei piani di quelle linee. Si avranno evidentemente le:

(1) Annali del Prof. Tortolini T. 5 Anno 1854 pag. 238.

(2) Vedi la nota del Prof. Codazzi in questi Annali — Novembre 1856.

$$l\frac{dx}{du}+m\frac{dy}{du}+n\frac{dz}{du}=0$$

$$a\frac{dx}{du}+b\frac{dy}{du}+c\frac{dz}{du}=0;$$

delle quali la prima, osservando le (4), conduce alla:

$$la+mb+nc=\text{cost.}\psi(v)$$

(teorema del Joachimsthal), e ponendo per brevità $k=\frac{\sqrt{E}}{\text{sen}\psi}$ si deducono dalle due le seguenti:

$$\frac{dx}{du}=k(mc-nb)\,,\ \frac{dy}{du}=k(na-lc)\,,\ \frac{dz}{du}=k(lb-ma)\,.$$

Quindi:

$$\frac{d^2x}{du^2}=\frac{dk}{du}(mc-nb)+\frac{k}{R_v}\left(n\frac{dy}{du}-m\frac{dz}{du}\right)\text{ec}\ldots$$

le quali moltiplicate ordinatamente per

$$\frac{dx}{dv}\,,\ \frac{dy}{dv}\,,\ \frac{dz}{dv}$$

e sommate danno la:

$$\frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{dE}{dv}=\frac{\text{cotang.}\psi}{R_v}$$

ossia per le denominazioni superiori:

$$\omega=\text{M}\,\text{cotang.}\psi(v)\ ;$$

ed analogamente sarà: (8) $\theta=\text{N}\,\text{cotang.}\xi(u)$

Se le linee $u=\text{cost.}^e$ sono piane. Reciprocamente se per le linee di curvatura $v=\text{cost.}^e$ $u=\text{cost.}^e$ sussistono le equazioni (8) le linee stesse sono piane. Infatti indicando con α_v, r_v per le linee $v=\text{cost.}^e$, l'angolo compreso dalla perpendicolare al piano del circolo osculatore e dalla normale

alla superficie, ed raggio del circolo osculatore si hanno le:

$$\frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{dE}{dv}=\frac{\cos\alpha_v}{r_v}, \qquad \frac{1}{R_v}=\frac{\operatorname{sen}\alpha_v}{r_v}$$

quindi la (8) diventa :

$$\operatorname{cotang}\alpha_v=\operatorname{cotang}\psi(v)$$

cioè le linee di curvatura $v=\text{cost.}^e$ sono linee piane.

Le linee $v=\text{cost.}^e$ sieno sferiche ed :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$$

essendo α, β, γ, r funzioni di v; sia l'equazione di una delle sfere. Si avranno le :

$$(x-\alpha)\frac{dx}{du}+(y-\beta)\frac{dy}{du}+(z-\gamma)\frac{dz}{du}=0$$

$$a\frac{dx}{du}+b\frac{dy}{du}+c\frac{dz}{du}=0$$

la prima delle quali per la (4) dà :

$$(x-\alpha)a+(y-\beta)b+(z-\gamma)c=r\cos\rho(v)$$

ed operando come superiormente giungesi alla :

$$(9) \qquad \omega=\frac{\sqrt{E}}{r\operatorname{sen}\rho(v)}+M\operatorname{cotang}.\rho(v)$$

ed analogamente se le linee $u=\text{cost.}$ sono sferiche si ha la relazione :

$$\theta=\frac{\sqrt{G}}{r_1\operatorname{sen}\rho_1(u)}+N\operatorname{cotang}\rho_1(u)$$

nella quale r_1, ρ_1 sono funzioni della sola u. Reciprocamente sussistendo le equazioni (9) per le linee di curvatura $v=\text{cost.}^e$, $u=\text{cost.}^e$ le linee medesime sono sferiche.

Le formole (3) (6) (7) (8) (9) sono le annunciate al § 1.

4. È noto che se una linea di curvatura di una super-

ficie è geodetica essa è piana. Non credo osservata la seguente proprietà. Se una linea di curvatura di una superficie è fra quelle che racchiudono massima o minima area fra le isoperimetre [1], essa è sferica. Infatti se con g indicasi il raggio di curvatura della linea, con α l'angolo compresso fra esso e la normale alla superficie, con h l'angolo di torsione della linea, si hanno le :

$$h' - \alpha' = 0 \qquad \frac{\operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{1}{m}$$

essendo m costante ; nella prima delle quali è espressa la proprietà dell'essere la linea una linea di curvatura della superficie, nella seconda di esser la linea stessa una didonia Ora questa seconda equazione da :

$$\alpha' = \frac{g'}{\sqrt{(m^2 - g^2)}}$$

e quindi per quella linea sarà :

$$\psi' = \frac{g'}{\sqrt{(m^2 - g^2)}}$$

proprietà caratteristica delle linee sferiche. La linea sarebbe tracciabile sulla sfera di raggio m, ed indicando con R il raggio di massima o di minima curvatura corrispondente a quella linea si ha la relazione :

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}.$$

È noto che se la linea $v = \text{cost.}^e$ è geodetica si ha :

$$\frac{dE}{dv} = 0$$

(1) Il sig. Hamilton ha proposto di denominare queste linee *Didonie*. Lectures on Quaternions, pag, 582.

e se la linea medesima è una didonia:

$$\frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{dE}{dv}=\xi(v)\ ;$$

le (8) (9) dimostrano che se quella linea è anche di curvatura si ha in generale nel primo caso $\psi(v)=\frac{\pi}{2}$, e nel secondo $\rho(v)=\frac{\pi}{2}$ (formole 8, 9).

5. Ciò premesso passiamo a considerare le superficie per le quali le linee di una curvatura sono geodetiche. Vedremo come questo caso conduce ad alcune delle superficie già trovate dai sig. Bonnet e Serret. Le linee di curvatura $v=$cost.^{e} sieno geodetiche; quindi $\frac{dE}{dv}=0$, $\omega=0$; le (3) integrate danno:

$$(10)\quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{dx}{dv}=l(v)\ ,\quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{dy}{dv}=m(v)\quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{dz}{dv}=n(v)$$

essendo $l^2+m^2+n^2=1$; e dalla prima delle (6) si ha:

$$\frac{dM}{dv}=0$$

cioè il raggio R_v che è anche il raggio del circolo osculatore delle linee $v=$cost.^{e} indipendente dalla variabile v. Le (10) dimostrano che le tangenti alle linee $u=$cost.^{e} in punti situati sopra una stessa linea $v=$cost.^{e} sono parallele. Dalle (10) si ha:

$$l\frac{dx}{du}+m\frac{dy}{du}+n\frac{dz}{du}=0$$

ed integrando:

$$lx+my+nz=\varphi(v)$$

equazione di uno qualunque dei piani delle linee $v=$cost.

Dalla seconda delle (6) e dalla (7) si ha in questo caso:

$$N\frac{dN}{du}+\theta\frac{d\theta}{du}=0$$

e quindi:

$$N^2+\theta^2=\zeta^2(v)$$

Pongasi:

$$\theta=N\,\mathrm{cotang}\eta$$

si hanno le:

$$\theta=\zeta(v)\cos\eta\,,\quad N=\zeta(v)\mathrm{sen}\eta\,,\ \frac{d\eta}{du}=M$$

ed essendo $\frac{dM}{dv}=0\ \frac{dE}{dv}=0$ si otterrà:

$$\eta=f(u)+F(v)\,,\quad \sqrt{E}=q(u)$$

per le quali:

$$\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{dG}{du}=\zeta(v)q(u)\cos[f(u)+F(v)]$$

$$\sqrt{G}=\zeta(v)\left[\cos F(v)\int q(u)\cos f(u)du\right.$$

$$\left.-\,\mathrm{sen}F(v)\int q(u)\mathrm{sen}f(u)du\right]+T(v)\,.$$

Determinato in questo modo il valore di $\sqrt{G}$, le (10) daranno quelli di x, y, z in funzioni di u, v, alcune delle funzioni arbitrarie rendendo valori particolari dietro le condizioni del problema. Accenniamo brevemente a quattro famiglie di superficie conosciute dotate della proprietà qui considerata.

1. $\varphi=0$, $n=0$; i piani delle linee $v=\text{cost.}^{e}$ passano tutti per l'asse della z. Le equazioni (10) danno:

$$x^2+y^2=k(u)\,,\quad z=h(u)$$

dalle quali eliminando u:

$$z=F(x^2+y^2)$$

cioè le superficie sono di rotazione.

2.° $\varphi = 0$, i piani delle linee $v = \text{cost.}^e$ passano per uno stesso punto. Le (10) in causa della (11) danno la :

$$x^2 + y^2 + z^2 = p^2(u)$$

cioè le linee $u = \text{cost.}^e$ sono situate sopra sfere concentriche. Questo caso coincide con quello discusso dal Bonnet al §. 2.° della parte terza della sua memoria (Journal de l'Ecole Polytecnique. Cahier 34 - 35 pag. 238) e dal Serret al §. 3.° della seconda parte della sua memoria (Journal de Liouville. T. 18 pag. 134).

3.° l, m, n costanti, ossia i piani delle linee $v = \text{cost.}^e$ sono paralleli fra loro. La (11) dà ;

$$l\frac{dx}{dv} + m\frac{dy}{dv} + n\frac{dz}{dv} = \varphi'(v)$$

quindi :

$$G = \varphi'^2(v)$$

e le linee $u = \text{cost.}^e$ sono anch'esse geodetiche. Le superficie che corrispondono a questo caso sono perciò sviluppabili.

4.° Sia $F(v) = 0$ cioè suppongasi $\eta = f(u)$ la (14) dà :

$$\theta = N\text{cotang}\, f(u)$$

la quale posta a confronto colla seconda delle (8) dimostra essere le linee del secondo sistema $u = \text{cost.}^e$ piane ed essere $f(u)$ l'angolo costante compreso dal piano della linea e dal piano tangente la superficie in un punto qualunque di essa linea. Sia :

$$x\lambda(u) + y\mu(u) + z\nu(u) = h(u)$$

l'equazione di uno dei piani delle linee $u = \text{cost.}^e$ essendo

$$\lambda\frac{dx}{dv} + \mu\frac{dy}{dv} + \nu\frac{dz}{dv} = 0$$

si avrà pei valori (10) :

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$

per soddisfare alla quale le λ, μ, ν dovranno essere costanti. Le linee di curvatura $u =$ cost.^{e} saranno perciò situate in piani paralleli; e le superficie che corrispondono a questo caso sono quindi quelle già considerate da Monge (Application de l'Analyse ecc. pag. 161). Le (12) dimostrano essere il raggio del circolo osculatore delle linee $u =$ cost.^{e} eguale a $\xi(v)$, per cui saranno eguali fra loro i raggi dei circoli osculatori delle linee $u=$cost.^{e} corrispondenti a punti situati sopra una medesima linea $v =$ cost^e.

5.° Considero ora le superficie nelle quali le linee $v=$cost^e. di una curvatura sono linee didonie. Si ha:

$$\frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{dE}{dv} = \frac{1}{\gamma(v)}\,.$$

Le formole (3) danno:

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{d^2x}{dudv} = \frac{1}{r}\frac{dx}{du} + \frac{1}{2G\sqrt{G}}\frac{dG}{du}\frac{dx}{dv} \text{ ecc.}$$

le quali integrate conducono alle:

$$(16)\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{dx}{dv} = \dfrac{1}{r}[x-\alpha(v)]\,, \quad \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{dy}{dv} = \dfrac{1}{r}[y-\beta(v)]\,, \\ \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{dz}{dv} = \dfrac{1}{r}[z-\gamma(v)] \end{cases}$$

e queste quadrate e sommate alla:

$$(17) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2$$

equazione delle superficie sferiche sulle quali sono situate le linee di curvatura di quel sistema. Considereremo un solo caso il quale conduce ad una famiglia di superficie già conosciute.

Sieno $\alpha = 0$, $\beta = 0$ cioè i centri delle sfere sieno sul-

l'asse delle z, retta qualsivoglia. Le prime due equazioni (16) danno :

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dv}=\frac{1}{y}\frac{dy}{dv}=\frac{\sqrt{G}}{r}=\frac{1}{2E}\frac{dE}{dv}$$

e quindi :

$$x=ym(u)\,,\quad x=p(u)m(u)\sqrt{E}\,,\quad y=p(u)\sqrt{E}.$$

e le linee $u=\text{cost}^e$. sono situate in piani passanti per l'asse della z. Le superficie corrispondenti a questo caso sono perciò quelle considerate dal Sig. Joachimsthal. Sostituendo i valori trovati per x, y nella (17) si ha :

$$p^2(u)n^2(u)E+(z-\gamma)^2=r^2$$

essendo $n^2(u)=1+m^2(u)$; per cui ponendo

$$p(u)n(u)\sqrt{E}=yn(u)=(z-\gamma)\text{tang}\eta$$

si ha facilmente per le (16) :

$$\frac{1}{r}\frac{d\gamma}{dv}=\frac{1}{\text{sen}\eta}\frac{d\eta}{dv}$$

da cui :

$$\eta=2\text{Angtang}p(u)\,e^{\int\frac{1}{r}\frac{d\gamma}{dv}dv}\quad;$$

la quale conduce ai noti valori di x, y, z in funzione di u e di v.

Pavia Agosto 1857.

Osservazione. In una nota pubblicata di recente nel giornale dell'I. R. Istituto Lombardo (fasc. 44. pag. 397 Settembre 1857) il Prof^e. Mainardi applicando alcune sue formole alla ricerca delle superficie di cui le linee di curvatura sono geodetiche , giunse ad un risultato che è in contraddizione col superiore. Ciò dipende dall'avere l'Au-

tore dedotto il proprio risultato dal decompòrre in due fattori una equazione, la quale, convenientemente modificata, essendo identica, non da luogo, in questo caso, a conseguenza veruna.

Colgo quest'occasione per osservare anche che tutti gli Autori i quali si occuparono di superficie di cui le linee di curvatura hanno proprietà speciali, trattando delle superficie per le quali le linee di una curvatura sono situate in piani passanti per una retta, dichiarano che alcune equazioni che le determinano furono date *senza dimostrazione* dal Sig. Joachimsthal nel vol. 30 del giornale di Crelle. Ora questo distinto Geometra in un lavoro intitolato « Memoire sur les surfaces courbes » pubblicato a Berlino in un programma scolastico (1848) non solo ha dato una bella dimostrazione di quelle equazioni, ma ha anche mostrato come da esse si potevano dedurre le seguenti interessanti proprietà delle superficie medesime:

1°. Le linee di curvatura dell'altro sistema sono sferiche.

2°. I centri di tutte le sfere sono sulla retta comune a tutti i piani delle curve del primo sistema.

3°. La superficie sviluppabile circoscritta alla superficie secondo una linea di curvatura del primo sistema è una superficie conica.

4°. Il vertice di questa coincide col centro della sfera sulla quale è situata la linea di curvatura corrispondente nell'altro sistema.

Ottobre 1857.

INTORNO AD ALCUNI TEOREMI DI DUPIN.

NOTA

DEL PROF. DELFINO CODAZZI.

Oggetto di questo scritto è la dimostrazione analitica di alcuni teoremi enunciati da Dupin e dimostrati dallo stesso mediante sole considerazioni geometriche nella memoria intitolata *De la stabilité des corps flottants.*

I.

Considero dapprima i teoremi, che fanno conoscere un punto qualunque della *surface des flottaisons* ed il piano tangente in un punto qualunque della *surface des centres de caréne.* Avverto che le dimostrazioni analitiche di questi due teoremi sono già state date dal sig. Prof. Bordoni nel *Giornale dell'Istituto lombardo* t. 6°; io le riproduco affine di pervenire a certe formole che serviranno per la dimostrazione degli altri.

Abbiasi un corpo omogeneo terminato da una superficie composta di varie plaghe, ciascuna delle quali sia parte di superficie continua; ed abbiasi un piano, il quale separi da esso corpo un segmento di volume dato V. Siano ξ, η, ζ le coordinate rettangole d'un punto qualunque del segmento; δ la lunghezza della perpendicolare condotta dall'origine al piano; a, b, c i coseni degli angoli che questa perpendicolare fa co'tre assi rettilinei delle ξ, delle η, delle ζ; avremo per ogni punto del piano.

$$(1) \qquad a\xi + b\eta + c\zeta = \delta.$$

Siano x, y, z le coordinate del centro di gravità del segmento; e sia $\zeta = f(\xi,\eta)$ l' equazione d' una plaga qualunque formante parte della superficie dello stesso segmento avremo

$$(2)\quad \begin{cases} V = \sum \iint \left(f - \dfrac{\delta - a\xi - b\eta}{c}\right) d\xi d\eta\,, \\ V_x = \sum \iint \left(f - \dfrac{\delta - a\xi - b\eta}{c}\right) \xi d\xi d\eta\,, \\ V_y = \sum \iint \left(f - \dfrac{\delta - a\xi - b\eta}{c}\right) \eta d\xi d\eta\,, \\ V_z = \dfrac{1}{2} \sum \iint \left[f^2 - \left(\dfrac{\delta - a\xi - b\eta}{c}\right)^2\right] d\xi d\eta\,, \end{cases}$$

ove gl'integrali relativi a ξ, η devono essere estesi al contorno della projezione della plaga qualunque sul piano $\xi\eta$; ed il segno Σ dinota la somma degli analoghi integrali per tutte le plaghe formanti parte della superficie del segmento.

Ora s' immagini la serie de' piani, i quali separano dal corpo segmenti di volumi tra loro eguali; è chiaro che questi piani saranno tangenti ad una stessa superficie continua e che i centri di gravità di quei segmenti giaceranno pure in una stessa superficie continua. La prima (2) somministra il valore di δ in funzione di due fra le tre quantità a, b, c, le quali sono unite tra loro mediante l'equazione

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1;$$

riterrò a, b indipendenti l'una dall'altra, e quindi c, δ funzioni d'entrambe. In conseguenza la (1) fornirà

$$(3)\qquad X - \frac{a}{c} Z = \frac{d\delta}{da}\,, \quad Y - \frac{b}{c} Z = \frac{d\delta}{db}\,,$$

ove le X, Y, Z sono le coordinate d'un punto qualunque della superficie inviluppo de' piani delle sezioni.

Chiamo P una qualunque delle funzioni sottoposte al doppio segno integrale nelle (2); $\eta_1(\xi)$, $\eta_2(\xi)$ le η del contorno d' una plaga qualunque corrispondenti ad uno stesso valore di ξ; infine ξ_1, ξ_2 le ξ minima e massima dello stesso contorno. Ponendo

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} P d\eta = Q(\xi) ,$$

abbiamo

$$\frac{d}{da} \cdot \sum \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta . P = \sum \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi . \frac{dQ(\xi)}{da} +$$

$$\sum Q(\xi_2) \cdot \frac{d\xi_2}{da} - \sum Q(\xi_1) \cdot \frac{d\xi_1}{da} ,$$

ove i Σ del secondo membro devono estendersi soltanto a quegl'integrali, chè provengono da plaghe aventi parte del contorno loro nel piano della base del segmento. È manifesto che

$$Q(\xi_1) = 0 , \quad Q(\xi_2) = 0 ,$$

perchè ξ_1, ξ_2 sono i valori minimo e massimo di ξ; quindi il secondo membro dell'equazione antecedente si riduce al solo suo primo termine. Inoltre

$$\frac{dQ(\xi)}{da} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta . \frac{dP}{da} + P(\eta_2) \frac{d\eta_2}{da} - P(\eta_1) \frac{d\eta_1}{da} ;$$

è chiaro che per que' punti del contorno d' una plaga i quali non giaciono nel piano della sezione, è $\frac{d\eta}{da} = 0$, e che per quelli i quali giaciono nel piano della sezione, è $P(\eta, \xi) = 0$; quindi anche il secondo membro di quest'ultima equazione si riduce al suo primo termine. In conseguenza.

$$\frac{d}{da}.\sum\int_{\xi_1}^{\xi_2}d\xi\int_{\eta_1}^{\eta_2}d\eta.\mathrm{P}=\sum\int_{\xi_1}^{\xi_2}d\xi\int_{\eta_1}^{\eta_2}d\eta.\frac{d\mathrm{P}}{da};$$

ed analogamente per la derivata rispetto a b.

Ciò premesso formo le derivate parziali della prima (2) rispetto ad a, b, ed ottengo

$$\frac{d\delta}{da}\sum\iint\frac{d\xi d\eta}{c}=\sum\iint\left(\xi-\frac{a}{c}\zeta\right)\frac{d\xi d\eta}{c},$$

$$\frac{d\delta}{db}\sum\iint\frac{d\xi d\eta}{c}=\sum\iint\left(\eta-\frac{b}{c}\zeta\right)\frac{d\xi d\eta}{c}.$$

Ora indicando con ω l'area della base del segmento, per cui:

$$\omega=\iint\frac{d\xi d\eta}{c},$$

le equazioni antecedenti per mezzo delle (1), (3) diventeranno

$$(4)\left\{\begin{array}{l}\omega\mathrm{X}=\sum\iint\frac{\xi d\xi d\eta}{c},\quad \omega\mathrm{Y}=\sum\iint\frac{\eta d\xi d\eta}{c},\\ \omega\mathrm{Z}=\sum\iint\frac{\zeta d\xi d\eta}{c};\end{array}\right.$$

le quali manifestano la proprietà che il piano della sezione tocca la superficie (X,Y,Z) nel centro di gravità della medesima sezione.

Le altre equazioni (2) derivate parzialmente prima rispetto ad a, poi rispetto a b somministrano le sei seguenti:

$$
(5)\begin{cases}
-\mathrm{V}\dfrac{dx}{da} = \left(\mathrm{X}-\dfrac{a}{c}\mathrm{Z}\right)\sum\iint\dfrac{\xi d\xi d\eta}{c}-\sum\iint\left(\xi-\dfrac{a}{c}\zeta\right)\dfrac{\xi d\xi d\eta}{c}, \\
-\mathrm{V}\dfrac{dy}{da} = \left(\mathrm{X}-\dfrac{a}{c}\mathrm{Z}\right)\sum\iint\dfrac{\eta d\xi d\eta}{c}-\sum\iint\left(\xi-\dfrac{a}{c}\zeta\right)\dfrac{\eta d\xi d\eta}{c}, \\
-\mathrm{V}\dfrac{dz}{da} = \left(\mathrm{X}-\dfrac{a}{c}\mathrm{Z}\right)\sum\iint\dfrac{\zeta d\xi d\eta}{c}-\sum\iint\left(\xi-\dfrac{a}{c}\zeta\right)\dfrac{\zeta d\xi d\eta}{c}, \\
-\mathrm{V}\dfrac{dx}{db} = \left(\mathrm{Y}-\dfrac{b}{c}\mathrm{Z}\right)\sum\iint\dfrac{\xi d\xi d\eta}{c}-\sum\iint\left(\eta-\dfrac{b}{c}\zeta\right)\dfrac{\xi d\xi d\eta}{c}, \\
-\mathrm{V}\dfrac{dy}{db} = \left(\mathrm{Y}-\dfrac{b}{c}\mathrm{Z}\right)\sum\iint\dfrac{\eta d\xi d\eta}{c}-\sum\iint\left(\eta-\dfrac{b}{c}\zeta\right)\dfrac{\eta d\xi d\eta}{c}, \\
-\mathrm{V}\dfrac{dz}{da} = \left(\mathrm{Y}-\dfrac{b}{c}\mathrm{Z}\right)\sum\iint\dfrac{\zeta d\xi d\eta}{c}-\sum\iint\left(\eta-\dfrac{b}{c}\zeta\right)\dfrac{\zeta d\xi d\eta}{c}.
\end{cases}
$$

Da queste si deducono facilmente

$$(6)\begin{cases} a\dfrac{dx}{da}+b\dfrac{dy}{da}+c\dfrac{dz}{da}=0\ , \\ a\dfrac{dx}{db}+b\dfrac{dy}{db}+c\dfrac{dz}{db}=0\ , \end{cases}$$

le quali manifestano l'altra proprietà che la normale alla superficie (x,y,z) è perpendicolare al piano della sezione.

II.

Passo ai teoremi di Dupin, che risguardano l'incurvamento della *surface des centres de carène*, cioè che servono a determinare la direzione delle linee di curvatura ed i valori de' due raggi di curvatura in un punto qualunque della superficie (x,y,z).

Si facciano, per brevità

$$\sum\iint\frac{\xi^2 d\xi d\eta}{c}=\alpha\ ,\quad \sum\iint\frac{\xi\eta d\xi d\eta}{c}=\beta\ ,$$

$$\sum\iint\frac{\eta^2 d\xi d\eta}{c}=\gamma;$$

la prima e quarta (5) mediante (1) e (4) diventano

$$c^2V\frac{dx}{da}=(1-b^2)\alpha+ab\beta-\Big((1-b^2)X+abY\Big)\omega X\ ,$$

$$c^2V\frac{dx}{db}=ab\alpha+(1-a^2)\beta-(abX+(1-a^2)Y)\omega X\ ,$$

ovvero

$$c^2V\frac{dx}{da}=(1-b^2)(\alpha-\omega X^2)+ab(\beta-\omega XY)\ ,$$

$$c^2V\frac{dx}{db}=ab(\alpha-\omega X^2)+(1-a^2)(\beta-\omega XY)\ ;$$

dalle quali

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha - \omega X^2 = V\left[(1-a^2)\dfrac{dx}{da} - ab\dfrac{dx}{db}\right], \\ \beta - \omega XY = V\left[(1-b^2)\dfrac{dx}{db} - ab\dfrac{dx}{da}\right]. \end{cases}$$

In modo analogo la seconda e quinta (5) diventano

$$c^2V\frac{dy}{da} = ab(\gamma - \omega Y^2) + (1-b^2)(\beta - \omega XY),$$

$$c^2V\frac{dy}{db} = (1-a^2)(\gamma - \omega Y^2) + ab(\beta - \omega XY);$$

dalle quali si deducono

$$(8)\quad \begin{cases} \beta - \omega XY = V\left[(1-a^2)\dfrac{dy}{da} - ab\dfrac{dy}{db}\right], \\ \gamma - \omega Y^2 = V\left[(1-b^2)\dfrac{dy}{db} - ab\dfrac{dg}{da}\right]. \end{cases}$$

Si assumano come variabili indipendenti, invece delle a, b, le x, y; risultano facilmente

$$\frac{da}{dx} = l\frac{dy}{db},\quad \frac{da}{dy} = -l\frac{dx}{db},\qquad \frac{db}{dx} = -l\frac{dy}{da},\quad \frac{db}{dy} = l\frac{dx}{da},$$

ove

$$l = \frac{da}{dx}\frac{db}{dy} - \frac{da}{dy}\frac{db}{dx}$$

Inoltre indicando con apici in alto ed in basso le derivate parziali di z prese ordinatamente rispetto ad x e ad y, abbiamo

$$a = \frac{z'}{r},\quad b = \frac{z_{\prime}}{r},\qquad c = \frac{-1}{r},$$

ove

$$r = \sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}\,.$$

Mediante questi valori si trovano con facilitá

$$(1-a^2)\frac{dx}{da} - ab\frac{dx}{db} = \frac{z_{,,}}{lr^3}\,,$$

$$(1-b^2)\frac{dx}{db} - ab\frac{dx}{da} = (1-a^2)\frac{dy}{da} - ab\frac{dy}{db} = \frac{z_{,}'}{lr^3}\,,$$

$$(1-b^2)\frac{dy}{db} - ab\frac{dy}{da} = \frac{z''}{lr^3}$$

$$l = \frac{z''z_{,,} - z_{,}'^2}{r^4}\,.$$

Per conseguenza le (7), (8)

$$(9)\left\{\begin{aligned} &\alpha - \omega X^2 = \frac{Vz_{,,}}{lr^3}\,, \quad \beta - \omega XY = \frac{-Vz_{,}'}{lr^3}\,, \\ &\gamma - \omega Y^2 = \frac{Vz''}{lr^3}\,; \end{aligned}\right.$$

ove

$$l = \frac{1}{hk}\,,$$

essendo h, k i due raggi di curvatura massima e minima della superficie.

Ora, denomino g il raggio di curvatura sferica di quella linea, la quale giace nella superficie (x,y,z), e fa con gli assi delle x, y gli angoli f_x, f_y; sará per nota formola

$$\frac{1}{g} = \frac{z''\cos^2 f_x + 2z_{,}'\cos f_x \cos f_y + z_{,,}\cos^2 f_y}{r}\,.$$

Moltiplicando le (9) rispettivamente per

$$\cos^2 f_y,\ -2\cos f_y \cos f_x,\ \cos^2 f_x$$

e sommandole tra loro s'ottiene

$$\sum\int\int\left(\eta\cos f_x - \xi\cos f_y\right)^2 \frac{d\xi d\eta}{c} = \omega(\mathrm{Y}\cos f_x - \mathrm{X}\cos f_y)^2 + \frac{\mathrm{V}hk}{r^2 g}\ ;$$

disponendo il piano xy secondo il piano della base del segmento e collocando l'origine delle coordinate nel centro di gravità di questa base, abbiamo

$$r = 1,\quad \cos f_y = \operatorname{sen} f_x,\quad \mathrm{X} = 0,\quad \mathrm{Y} = 0\ ;$$

allora l'equazione antecedente si cambia nella

$$(10)\qquad \mathrm{V}\frac{hk}{g} = \sum\int\int(\eta\cos f_x - \xi\operatorname{sen} f_x)^2\frac{d\xi d\eta}{c}\ .$$

Si noti che $\eta\cos f_x - \xi\operatorname{sen} f_x$ esprime la distanza d'un punto qualunque della base da quella retta, la quale passa pel centro di gravità della medesima e forma l'angolo f_x con l'asse delle x; quindi

$$\sum\int\int(\eta\cos f_x - \xi\operatorname{sen} f_x)^2\frac{d\xi d\eta}{c}$$

esprime il momento d'inerzia della base rispetto alla stessa retta. Ciò premesso, l'equazione (10) insegna che g diviene minimo oppure massimo, e quindi la frazione $\frac{hk}{g}$ diventa eguale al massimo oppure al minimo raggio di curvatura quando il secondo membro rappresenta il massimo ovvero il minimo momento. d'inerzia. Dunque s'ottengono i diversi teoremi di Dupin.

In un punto qualunque della superficie (x,y,z) le linee di curvatura massima e minima sono ordinatamente parallele agli assi de' momenti d'inerzia massimo e minimo della base; ed i raggi di curvatura massima e minima sono ordinatamente eguali a momenti d'inerzia minimo e massimo d'essa base divisi pel volume del segmento.

III.

Osservo che la proprietà, dalla quale Dupin conclude questi ultimi teoremi, è per sè stessa insussistente. Affine di enunciare quella proprietà premetto alcune denominazioni. Due punti situati in due diverse superficie aventi le normali parallele ciascuna a ciascuna si diranno *corrispondenti* tra loro, quando la normale nell'un punto sarà parallela alla normale nell'altro; due linee situate nelle medesime due superficie si chiameranno tra loro *corrispondenti*, quando ciascun punto dell'una sarà corrispondente a ciascun punto dell' altra. Rammento inoltre che le caratteristiche della superficie sviluppabile tangente ad una superficie qualunque lungo una linea tracciata in essa e le rette tangenti a questa linea sono tangenti conjugate tra loro. Ora la proprietà di Dupin può essere enunciata come segue: il raggio di curvatura sferica d'una linea qualunque tracciata nella superficie (x,y,z) moltiplicato pel volume del segmento ha per valore il momento d'inerzia della base rispetto a quell'asse, il quale passa pel centro di gravità della medesima ed è la tangente conjugata della linea situata nella superficie (X,Y,Z) e corrispondente alla data. Di più Dupin ammette, che la linea tracciata nella prima superficie e la tangente conjugata della sua corrispondente formino tra loro angoli retti [1].

Per dimostrare che quest'enunciato e quest'ipotesi competono unicamente a'raggi di curvatura massima e minima della supesficie (x,y,z), e non a'raggi di curvatura sferica d'una linea qualunque tracciata in essa, premetto il seguente

Teorema. Se s'immaginano in una superficie (X,Y,Z) due

[1] V. *Applications de Geométrie etc.* de Dupin, Paris 1822, p. 33 e 35.

linee M,N a tangenti conjugate, ed in una superficie (x,y,z) a normali parallele a quelle della prima le due linee m,n corrispondenti e le due linee μ, ν a tangenti parallele a quelle delle M N, si trova che tanto le m, ν quanto le n, μ sono linee a tangenti conjugate.

Dimostrazione. Dinoto con apici in alto ed in basso le derivate parziali di Z rispetto ad X, Y e di z rispetto ad x, y; con X_u, Y_u, x_v, y_v i valori delle X, Y, x, y relativi a due linee u, v tracciate nelle due superficie; e con t una variabile qualunque. Saranno

$$Z' = z' \;, \qquad Z_{\prime} = z_{\prime} \;;$$

da cui

$$Z'' \frac{dX}{dt} + Z'_{\prime} \frac{dY}{dt} = z'' \frac{dx}{dt} + z'_{\prime} \frac{dy}{dt} \,,$$

$$Z'_{\prime} \frac{dX}{dt} + Z_{\prime\prime} \frac{dY}{dt} = z'_{\prime} \frac{dx}{dt} + z_{\prime\prime} \frac{dy}{dt} \,.$$

Queste, avvertendo che

$$\frac{dY_M}{dX_M} = \frac{dy_\mu}{dx_\mu} \,, \qquad \frac{dY_N}{dX_N} = \frac{dy_\nu}{dx_\nu} \,,$$

forniscono facilmente le due

$$\frac{dX_M}{dt} \left[Z'' + \left(\frac{dY_M}{dX_M} + \frac{dY_N}{dX_N} \right) Z'_{\prime} + \frac{dY_M}{dX_M} \frac{dY_N}{dX_N} Z_{\prime\prime} \right]$$

$$= \frac{dx_m}{dt} \left[z'' + \left(\frac{dy_m}{dx_m} + \frac{dy_\nu}{dx_\nu} \right) z'_{\prime} + \frac{dy_m}{dx_m} \frac{dy_\nu}{dx_\nu} z_{\prime\prime} \right] ,$$

$$\frac{dX_N}{dt} \left[Z'' + \left(\frac{dY_M}{dX_M} + \frac{dY_N}{dX_N} \right) Z'_{\prime} + \frac{dY_M}{dX_M} \frac{dY_N}{dX_N} Z_{\prime\prime} \right]$$

$$= \frac{dx_n}{dt} \left[z'' + \left(\frac{dy_n}{dx_n} + \frac{dy_\mu}{dx_\mu} \right) z'_{\prime} + \frac{dy_n}{dx_n} \frac{dy_\mu}{dx_\mu} z_{\prime\prime} \right]$$

Dunque se

$$Z''+\left(\frac{dY_M}{dX_M}+\frac{dY_N}{dX_N}\right)Z_{\prime}'+\frac{dY_M}{dX_M}\frac{dY_N}{dX_N}Z_{\prime\prime}=0\quad,$$

avranno luogo le

$$z''+\left(\frac{dy_m}{dx_m}+\frac{dy_\nu}{dx_\nu}\right)z_{\prime}'+\frac{dy_m}{dx_m}\frac{dy_\nu}{dx_\nu}z_{\prime\prime}=0\quad,$$

$$z''+\left(\frac{dy_n}{dx_n}+\frac{dy_\mu}{dx_\mu}\right)z_{\prime}'+\frac{dy_n}{dx_n}\frac{dy_\mu}{dx_\mu}z_{\prime\prime}=0\quad;$$

le quali rendono manifesta la proprietà dichiarata. Ne segue che se le linee m, N fossero perpendicolari l'una all'altra le m, ν sarebbero linee di curvatura della superficie (x,y,z).

Ora, applicando questo risultato e la (10) all'enunciato ed all'ipotesi di Dupin, si vede facilmente essere dallo stesso dimostrato, che ciascun raggio di curvatura massima o minima moltiplicato pel volume del segmento ha per valore il momento d'inerzia della base rispetto ad un asse parallelo alla linea dell'altra curvatura; non essere dimostrato che ciascuno di questi due momenti è minimo oppure massimo tra tutti i momenti d'inerzia della base medesima, e che le linee di curvatura sono parallele agli assi di questi due momenti massimo e minimo.

IV.

Da ultimo considero i teoremi di Dupin concernenti l'incurvamento della *surface des flottaisons*, cioè che fanno conescere la direzione delle linee di curvatura ed i valori dei due raggi di curvatura massimo e minimo in un punto qualunque della superficie (X,Y,Z):

Il contorno della base del segmento sarà composto di tanti lati quante sono le plaghe segate dal piano (1); in-

dicando con Σ la somma di tanti integrali quanti sono essi lati, e con ξ_1, ξ_2 le ξ estreme d'uno qualunque tra'medesimi, avremo

$$\omega = \sum \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\eta d\xi}{c}, \quad \omega X = \sum \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi \eta d\xi}{c},$$

$$\omega Y = \frac{1}{2} \sum \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\eta^2 d\xi}{c}.$$

Si formano le derivate parziali de' secondi membri di queste equazioni rispetto ad a, b soltanto coll'eseguire le derivazioni sotto al segno integrale, giacche le quantità

$$\frac{d\xi_1}{da}, \frac{d\xi_2}{da}, \frac{d\xi_1}{db}, \frac{d\xi_2}{db}$$

sarebbero moltiplicate da coefficienti relativi agli estremi valori della ξ e quindi nulli. Si troveranno in conseguenza

$$\frac{d.c\omega}{da} = \sum \int \frac{d\eta}{da} d\xi,$$

$$c\omega \frac{dX}{da} + X \frac{d.c\omega}{da} = \sum \int \frac{d\eta}{da} \xi d\xi,$$

$$c\omega \frac{dY}{da} + Y \frac{d.c\omega}{da} = \sum \int \eta \frac{d\eta}{da} d\xi,$$

dalle quali si deducono le prime due tra le seguenti

$$(11) \begin{cases} c\omega \dfrac{dX}{da} = \sum \int (\xi - X) \dfrac{d\eta}{da} d\xi, \\ c\omega \dfrac{dY}{da} = \sum \int (\eta - Y) \dfrac{d\eta}{da} d\xi, \\ c\omega \dfrac{dX}{db} = \sum \int (\xi - X) \dfrac{d\eta}{db} d\xi, \\ c\omega \dfrac{dY}{db} = \sum \int (\eta - Y) \dfrac{d\eta}{db} d\xi; \end{cases}$$

s'ottengono le altre due coll'operare rispetto a b, come s'era operato rispetto ad a.

Ciascun lato del contorno avrà per equazione la (1) in cui la ζ sia riferita alla plaga corrispondente; ora quell'equazione somministra

$$\left(b+c\frac{d\zeta}{d\eta}\right)\frac{d\eta}{da}=\frac{d\delta}{da}-\left(\xi-\frac{a}{c}\zeta\right),$$

$$\left(b+c\frac{d\zeta}{d\eta}\right)\frac{d\eta}{db}=\frac{d\delta}{db}-\left(\eta-\frac{b}{c}\zeta\right);$$

ovvero

$$(12)\begin{cases}\left(b+c\frac{d\zeta}{d\eta}\right)\frac{d\eta}{da}=X-\xi-\frac{a}{c}(Z-\zeta)\ ,\\ \left(b+c\frac{d\zeta}{d\eta}\right)\frac{d\eta}{db}=Y-\eta-\frac{b}{c}(Z-\zeta)\ .\end{cases}$$

Si formi la derivata totale della (1) rispetto a ξ, ordinata del lato qualunque, e s'otterrà

$$\left(b+c\frac{d\zeta}{d\eta}\right)\frac{d\eta}{d\xi}+a+c\frac{d\zeta}{d\xi}=0\ ;$$

quindi chiamando s una parte qualsivoglia d'esso lato, risulterà

$$(13)\qquad\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2=\frac{\left(a+c\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2+\left(b+c\frac{d\zeta}{d\eta}\right)^2+\left(b\frac{d\zeta}{d\xi}-a\frac{d\zeta}{d\eta}\right)^2}{\left(b+c\frac{d\zeta}{d\eta}\right)^2}\ .$$

S'indichino con apici in alto ed in basso le derivate parziali di Z rispetto ad X e ad Y, e si ponga

$$R=\sqrt{(1+Z'^2+Z_{\prime}^2}.$$

Siccome

$$a = \frac{Z'}{R}, \quad b = \frac{Z_{,}}{R}, \quad c = -\frac{1}{R};$$

così si troveranno

$$(14) \begin{cases} HK \dfrac{da}{dX} = \dfrac{dY}{db}, & HK \dfrac{da}{dY} = -\dfrac{dX}{db}, \\ HK \dfrac{db}{dX} = \dfrac{-dY}{da}, & HK \dfrac{db}{dY} = \dfrac{dX}{da}; \end{cases}$$

ove H, K sono i due raggi di curvatura massima e minima della superficie (X, Y, Z).

Ora, si disponga il piano XY parallelamente al piano (1), per cui saranno

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 1;$$

e si denomini λ l'angolo formato dalla normale alla plaga lungo il corrispondente lato del contorno con la perpendicolare ad esso piano, per cui

$$-\operatorname{tang}\lambda = \sqrt{\left[\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)^2\right]}.$$

Le (12), (13), (14) si muteranno nelle

$$\frac{d\zeta}{d\eta}\frac{d\eta}{da} = X - \xi, \quad \frac{d\zeta}{d\eta}\frac{d\zeta}{db} = Y - \eta.$$

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{d\xi}{ds}\operatorname{tang}\lambda;$$

$$\frac{dX}{da} = HKZ_{,,}, \quad \frac{dX}{db} = \frac{dY}{da} = -HKZ_{,}', $$

$$\frac{dY}{db} = HKZ''.$$

Mediante questi valori le (11) diventano

$$(15)\begin{cases}\omega HKZ_{\prime\prime} = \sum\int_0^{s_0}(X-\xi)^2\cot\lambda ds \ , \\ \omega HKZ'_{\prime} = -\sum\int_0^{s_0}(X-\xi)(Y-\eta)\cot\lambda ds \ , \\ \omega HKZ'' = \sum\int_0^{s_0}(Y-\eta)^2\cot\lambda ds \ ;\end{cases}$$

ove s_0 dinota la lunghezza del lato qualunque. Si collochi l'origine delle coordinate nel centro di gravità della base, e si chiamino F l'angolo formato da una linea qualsivoglia esistente nella superficie (X, Y, Z) con l'asse delle X, G il raggio di curvatura sferica di questa linea; dalle (15) si conclude facilmente l'equazione

$$(16) \qquad \omega\frac{HK}{G} = \sum\int(\eta\cos F - \xi\,\mathrm{sen}F)^2\cot\lambda . ds \ ,$$

la quale manifestamente contiene i seguenti teoremi di Dupin

In un punto qualunque della superficie (X, Y, Z) le linee di curvatura massima e minima sono ordinatamente tangenti agli assi de' momenti d'inerzia massimo e minimo del contorno il quale abbia tutti i punti gravati di pesi proporzionali alla tangente dell'angolo formato dal proprio piano con la normale alla superficie esteriore del corpo ed i raggi di curvatura massima e minima sono ordinatamente eguali a'momenti d'inerzia minimo e massimo dello stesso contorno gravato come sopra e divisi per l'area della base.

Pavia, agosto 1857.

CHRISTOPHE RUDOLF

ARTICLE

publié dans le *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie Mathématiques, des Nouvelles Annales de Mathématiques de M. Terquem*
(Tome prèmier, Mai et Juin 1855, pag. 71-83)

Le plus ancien ouvrage d'algèbre en Allemagne est celui de Cristophe Rudolf de Januer (1), et a paru en 1524. Je n'ai vu nulle part la description de cette première édition. En 1552, l'ouvrage était déjà si rare, que le prix avait quadruplé. C' est ce qui engagea Michel Stiffel á en donner une nouvelle édition (2) sous ce titre: *Die cosz Christorfs Rudolfs mit schönen Exemplen der cosz, durch Michael Stiffel, gebessert und sehr gemehrt*, 1571 ; in-4 de 491 pages: La cosz de Christophe Rudolf avec de beaux exemples de la cosz, améliorée et très-augmentée par Michael Stiffel.

Le titre porte 1571; mais à la fin de l'ouvrage on lit: *Gedruckt zu Königsperg in Preussen, durch Alexandrum Behm von Luthomissel, vollendet am dritten Tag des herbstmonats als man zalt nach der geburt Unsers Lieqen Herren Jesu Christi* 1554: Imprimé à Konigsberg, en Prusse, par Alexandre Behm, de Lùthomissel, fini le troisième jour du mois d'automme, lorsqu'on compte 1554 après la naissance de Notre Cher Seigneur Jésus-Christ.

(1) Près de Liegnitz, en Silésie, province qui, au xvie siècle appartenait à l'Empereur, comme roi de Bohême.

(2) Murhard indique une edition de 1626 et de Nuremberg 1661.

Ainsi, l'ouvrage a été publié dix-sept ans aprés l'impression. Voici comment Stiffel raconte ce qui lui a fait entreprendre cet ouvrage: « Après l'apparition de la cosz du » Rudolf, plusieurs maîtres de calcul (*rechenmeister*) alle- » mands s'occupèrent de l'*algebra numerosa*, et contraire- » ment à la charité chrétienne, en injuriant et maudissant » l'auteur, parce qu'il avait donné ses régles sans y joindre » aucune démonstration. Cependant, come dit Salomon, *le* » *fou dit tout ce qu'il fait, et le sage se retient* (Prov.), et » d'ailleurs voulant faire un bon livre, il lui était loisible » d'y mettre ce qu'il voulait (1). »

A la fin de l'impression de cette nouvelle édition, Stiffel reçut de Jean Neudoffer, maitre de calcul á Nuremberg, au autographe de Rudolf, contenant les démonstrations de ses théorèmes par des figures de géométrie. Stiffel ajouta ces figures à cette nouvelle édition, en avertissant qu'elles appartenaient à Rudolf, et cela pour écarter les soupçons qu'on avait répandus, que Rudolf ne comprenait rien à ses règles, et qu'il les avait tirées d'un manuscrit de la Bibliotèque de Vienne. Du reste, ces figures *montrent*, mais ne démontrent pas.

Rudolf débute ainsi: « Ce livre est partagé en deux par- » ties: la première renferme huit algorithmes et autres pré- » liminaires, nécessaires pour expliquer la cosz; l'autre » partie donne les règles de la cosz, chacune expliquée a » part, au moyen de nombreux et de beaux exemples. »

(1) Rudolf est pour l'Allemagne ce qu'est pour l'Italie Fibonacci, dont nous parlerons à l'occasion d'un manuscrit precieux qui vient d'être decouvert et publie par le savant prince de Boncompagni.

PREMIÈRE PARTIE.

« La première partie de ce livre est subdivisée en douze » chapitres: le *Chapitre Ier* traite de l'algorithme ordinaire » des nombres entiers; apprend à numérer, ajouter, sou- » straire, multiplier, diviser, progresser. »

Voici comme il énonce le nombre 24375634567:

Vingt-quatre fois mille mille mille trois cents fois mille mille soixante-quinze fois mille mille six cent mille trentequatre mille cinq cent soixante-sept. Les mots *million*, *billion* ont été introduits plus tard par les Italiens, et on les trouve déjà chez Albert Girard (mort vers 1633).

Il donne dans ce chapitre les règles pour la progression arithmétique et géométrique. Stiffel ajoute les nombres parfaits, trigonaux, et les progressions qui donnent les côtés rationnels de triangles rectangles.

Chapitre II. « De l'algorithme ordinaire des fractions, » enseigne brièvement à écrire, à énoncer, sommer, sous- » traire, multiplier, diviser les fractions. »

Chapitre III. « Enseigne la règle *detri* en nombres en- » tiers et rompus: Donne la dernière place à l' objet en » question, pose à le première place ce qui a même nom » que l'objet en question, et met l'autre objet au milieu; » ensuite multiplie le moyen nombre avec le dernier et di- » vise par le premier, et tu as dans le quotient ce que » coûte le troisième nombre. »

Il termine par cette règle *detri* inverse: « Multiplie le » moyen nombre par le premier et divise par le troisième, » et tu as réponse à la question. »

Chapitre IV. « Enseigne à extraire des racines: cela veut » dire extraire des racines en carrés et cubes. »

Mêmes procédés qu'aujourd'hui: il donne les racines des

nombres irrationnels à une unité près et pas d'approximations ultérieures.

Chapitre V. « De l'algoritme de la cosz, en latin : *De*
» *additis et diminutis integrorum*; cela veut dire des nom-
» bres ajoutés et retranchés. L'addition est marquée par
» le signe + : cela signifie *plus*. La soustraction par le
» signe — : cela signifie *minus*. »

C'est la premiere apparition de ces signes.

Numérer. « Les anciens, nos prédécesseurs, après une
» application sérieuse ont inventé la *cosz* : cela veut dire
» le calcul d'une chose et le compte des nombres d'après
» l'ordre naturel ..., et ont aussi désigné, pour abréger,
» par des signes tirés du commencement du mot ou du
» nom de cette manière. »

Ici Rudolf donne dix signes en caractères gothiques que, pour éviter les embarras typographiques, nous remplaçons par les lettres ordinaires:

d	*dragma*	correspond à	$x^0 = 1$,
r	*racine*	—	x^1,
c	*census*	—	x^2,
C	*cubus*	—	x^3,
cc	*census deceus*	—	x^4,
sc	*sursolidum*	—	x^5,
cC	*censicubus*	—	x^6,
BcC	*Bsursolidum*	—	x^7,
ccc	*censceus deceus*	—	x^8,
CC	*cubus de cubo*	—	x^9,

Il enseigne ensuite la règle des signes pour les quatre opérations comme aujourd'hui.

Exemple: A multiplier $6r + 8d$ par $5r - 7d$. Il trouve pour produit

$$30c - 2r - 56d;$$

car rr est c et dd reste d

$$\frac{5C}{7cc} = \frac{5d}{7r} .$$

Chapitre VI. Calcus des fraction cossiques

Chapitre VII. Algorithme *de surdis quadratorum*.

Rudolf distingue trois sortes d'irrationnelles quadratiques et se sert du signe actuel $\sqrt{\ }$.

Exemple :

1.° Rationnelles : $\sqrt{(a^2)} + \sqrt{(b^2)} = a + b$.

2.° Communicant : $\sqrt{(a^2c)} + \sqrt{(b^2c)} = (a + b)\sqrt{c}$.

3.° Non-communicant: $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

L'addition et la soustraction sont fondées sur ces formules:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{(a+b+\sqrt{4ab})}; \quad \sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{(a+b-4\sqrt{ab})}$$

Chapitre VIII. Algorithme nommé en latin *de surdis cubicorum*.

On désigne la racine cubique par ce signe $\sqrt{\ }\sqrt{\ }\sqrt{\ }$.

On y trouve la formule

$$\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{(m + n + 3\sqrt[3]{m^2n} + 3\sqrt[3]{mn^2})} .$$

Chapitre IX. Algorithme nommé en latin *de surdis quadratorum de quadratis*.

La racine quatrième est représentée par $\sqrt{\ }\sqrt{\ }$. Exemples des quatre opérations.

Chapitre X. Algorithme nommé en latin *de binomiis et residuis*.

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est un binôme et $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ est un résidu;

il enseigne les quatre opérations sur le binomes et les résidus.

Exemple :

$$\frac{16+\sqrt{64}}{10-\sqrt{4}}=\frac{(16+\sqrt{64})(10+\sqrt{4})}{(10-\sqrt{4}\ )(10+\sqrt{4})}$$

$$=\frac{176+\sqrt{(12544)}}{96}=1\frac{5}{6}+\sqrt{\left(1\ \frac{13}{36}\right)}=3\ .$$

Chapitre XI. Extraction des racines carrées des nombres binômes et des nombres résidus. Énoncé de la même régle qu'on trouve dans l' *Aritmétique universelle* de Newton et sans démonstration; ainsi

$$\sqrt{(7+\sqrt{48})}=2+\sqrt{3}\ .$$

Chapitre XII. Les cinq espéces de nombres proportionnés.

1.° *Multiplex* $\frac{mn}{n}$; ainsi

$\frac{2n}{n}$ *propertio dupla*

$\frac{3n}{n}$ — *tripla* ,

$\frac{n}{2n}$ — *subdupla* ,

$\frac{n}{3n}$ — *subtripla*.

2.° *Superparticularis* $\frac{n+1}{n}$:

$\frac{3}{2}$ *sequialtera* $\frac{4}{3}$ *sequitertia* $\frac{5}{4}$ *sequiquarta* .

3.° *Superpartiens* $\frac{n+p}{n}$ où $p < n$ et > 1 :

$\frac{5}{3}$ *superpartiens tertias*, $\frac{7}{4}$ *superpatiens quartas*.

4.° *Multiplex superparticularis* $\frac{mn+1}{n}$:

$\frac{5}{2} = \frac{2.2+1}{2}$ = *dupla superpartiens tertias*,

$\frac{17}{4} = \frac{4.4+1}{4}$ = *quadrupla sequiquarta*,

$\frac{31}{6} = \frac{6.5+1}{6}$ = *quintupla sesquisexta.*

5.° *Multiplex superpartiens* $\frac{mn+p}{n}$, $p < n$ et < 1 :

$\frac{8}{3} = \frac{3.2+2}{3}$ *dupla superbipartiens tertia*,

$\frac{18}{5} = \frac{3.5+3}{5}$ = *tripla supertripartiens quinta*.

Ces dénominations, soit dit en passant, prouvent d'une manière irréfragable que les Grecs, qui s'en sont servis, n'avaient aucune idée d'une numération chiffrée.

Lorsque deux quantités son égales, il y a *proportio aequalitatis*; pour deux quantités inégales, il y a *proportio inaequalitatis* et *majoris*, par exemple, pour $\frac{3}{2}$ et *minoris* pour $\frac{2}{3}$.

On voit que *proportio* est pris pour rapport chez les écrivains du moyen âge. Rudolf renvoie pour plus de détails à Boëce.

SECONDE PARTIE

La seconde Partie est diviseé en trois *differences* (1).

Première différence.

La première différence contient les huit règles de la *cosz.* Rudolf dit que « les anciens l'ont nommée *l'art des cho-*
» *ses, parce qu'à son aide on peut résoudré les secrets des*
» *questions sur les choses, savoir sur les nombres et les me-*
» *sures.*

» Dans chaque question, on se servait de la formule :
» *Ponatur una res.* Les régles de solution ont été nommées
» en italien *regule de la cosse* une *cossa* signifie une chose.»

L'ordre naturel des quantités est *d*, *r*, *c*, C, *cc*, etc., (voir ci-dessus). *r* est dit plus grand que *d*, *c* plus grand que *r*, et ainsi de suite.

1*re* *équation.* Deux quantités qui se suivent dans l' ordre naturel deviennent égales.

Exemples :

3*r* égal 6*d* fac. .*r*.2.

4*c* égal 8*r* —

4C égal 10*c* —

cela revient à

$$3x = 6\ ,\quad 4x^2 = 8x\ ,\quad 5x^3 = 10x^2\ ,$$

d'où

$$x = 2.$$

(1) Dénomination empruntée aux Arabes. L'expression *Ponatur una res* est l'origine des nombres *positifs*.

Rudolf ne connait par la signe =, il se sert du point. Ainsi *r*. 2 cela veut dire $x = 2$; il choisit tous ses exemples de manière que l'on ait $x = 2$. Il démontre la règle par une figure de géométrie: c'est un rectangle partagé en cinq rectangles égaux.

Nous écrirons les équations suivantes d'après la manière actuelle.

2e. *équation.* Deux quantités sont égales entre lesquelles une quantité naturelle est supprimée. Nous écrirons :

Exemple :

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2 = 8x^0 , \\ 3x^3 = 12x , \end{array}\right\} x = 2.$$

3e *équation. Exemple* :

$$\left.\begin{array}{l} 2x^3 = 16x^0 , \\ 3x^4 = 24x , \end{array}\right\} x = 2.$$

4e *équation. Exemple* :

$$\left.\begin{array}{l} 2x^4 = 32x^0 , \\ 3x^5 = 48x , \end{array}\right\} x = 2.$$

5e *équation Exemple* :

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 + 4x = 20x^0, \\ 5x^3 + 6x^2 = 32x , \end{array}\right\} x = 2.$$

Rudolf donne la règle ordinaire pour la résolution de l'équation du second degré.

La figure se rapporte à l'équation

$$x^2 + 8x = 240 ;$$

on a

$$240 = 144 + 96 , \quad 96 = 2.48 = 4.12 + 4.12 ;$$

il construit les deux rectangles 4.12 et le carré 12.12.

Ces trois rectangles ayant pour hauteur commune 12 sont réunis dans un seul rectangle ayant pour hauteur 12 et pour hauteur 20, et dont l'aire est 240; ainsi l'équation se trouve vérifiée. Il en est ainsi pour toutes les autres figures; elles ne *démontrent* pas les solutions, mais les vérifient.

6e *équation. Exemple* :

$$\left.\begin{array}{l} 4x^2 + 8x^0 = 12x\ , \\ 3x^3 + 9x = 14\tfrac{1}{2}x\ , \\ 3x^2 + 30x^0 = 19x\ , \\ 2x^3 + 31x = 21\tfrac{1}{2}x\ , \end{array}\right\} x = 2.$$

La figure vérifié l'équation

$$x^2 + 96 = 20x\ , \quad x = 12.$$

Stiffel dit que Rudolf a d'abord donné un énoncé faux, mais qu' il a rectifié dans un opuscule qu'il a publié postéuriement. Quel est cet opuscole ?

7e *equation. Exemple* :

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 12x^0 = 5x^2 \\ 5x^2 + 13x = 6x^3 \end{array}\right\} x = 2.$$

La figure vérifie l'équation

$$x^2 = 8x - 240\ ; \quad x = 20.$$

Rudolf donne à la valeur 20 le nom *racine vraie*: c'est qu'il regarde la seconde racine $x = -12$ comme *fausse*.

8e équation. Exemple :

$$24x^4 + 5x^2 = 52,$$
$$3x^5 + 6x^3 = 72x,$$
$$x^6 + 3x^3 = 88,$$
$$2x^7 + 4x^4 = 160x,$$
$$2x^8 + 8x^4 = 640,$$
$$3x^9 + 10x^5 = 928x.$$

Cette classification des équations quadratique est évidemment d'origine arabe (*voiz* Alkhâgâmi de Woepcke, *Nouvelles Annales*, tome IX, pag. 389, et tome XIII, pag. 148. L'Arabe introduit souvent l'unité comme facteur pour rétablir l'homogénéité géométrique, et par imitation Rudolf a un signe particulier pour représenter l'unité.

Deuxième différence. (Cautèles.)

On avait donné jusqu'à Rudolf vingt-quatre espèces d'équations du second degré. Alkhâgâmi en donna même vignt-cinq (*Nouvelles Annales*, tome IX, page 389). Rudolf enseigne ici les moyens (cautèles) de réduire ces vingt-quatre espèces aux huit qu'il a indiquées. Il donne quatre règles pour opérer cette réduction: les deux premières règles apprennent à transporter un terme d'un membre dans un autre par le changement de signe; la troisième règle apprend à faire disparaître les radicaux par l'élévation à des puissances; la quatrième enseigne à faire disparaître les denominateurs.

Troisième différence. (Ènigmes.)

Cette troisième et dernière Partie ne porte aucun titre et contient quatre cent trente-trois problèmes (*oenigmata*)

pour l'application des huit règles cossiques. Il y a des questions numériques pour la spéculation et d'autres pour la pratique.

Et à la fin il y a huit problèmes qui ne peuvent se resoudre par ces huit règles cossiques, parce qu'elles mènent à des équations du troisième degré. Stiffel pense que par là Rudolf voulait dire: « Vois, mon cher lecteur, j'ai traité dans ce mien livre seulement de la cosz quadratique; eh bien, il y a encore la cosz cubique dont je ne t'ai rien dit; puisses-tu apprendre, à cause de cela, la cosz cubique dans cette louable intention, je te montre ce cube. » En effet, l'ouvrage de Rudolf est terminé par la représentation d'un cube, divisé de manière à figurer les quatre termes du développement de $(3 + \sqrt{2})^3$.

Nous avons tiré ce qui précède des scolies que M. A. Drechsler, professeur, a *publiées* en 1851 sous ce titre: *Scholien zu Christoph Rudolfs Cosz.* Dresde; in-8 de 47 p.

Kästner donne des renseignements fort curieux sur l'ouvrage de Stiffel [*Histoire des Mathématiques*, tome I, page 174 (1)]. Stiffel dédie son ouvrage à Christoqhe Ottendorffer, honorable bourgeois de Koenigsberg (Prusse), et dans un appendice il lui raconte cette histoire de sa vie. Moine Augustin à Esslingen, il avait appris dans les livres de Luther que la vie monastique était une abomination devant Dieu, mais ne savait pas comment il pourrait subvenir à ses besoins hors de son couvent. Cela pesait lourdement sur sa conscience, surtout à cause des messes journalières. En 1520, ayant lu dans l'Apocalypse: *Timidis autem et incredulis ... pars illorum erit in stagno ardenti, igne et sulphure*

(1) La première édition est de 1554 et la seconde de 1571; il y a une édition de 1615, imprimée à Amsterdam chez W. Janson. On dit qu'il existe une édition en hollandais de la même année 1615, imprimée aussi à Amsterdam.

(XXI, 8), il ne pouvait plus ni dormir dans son lit ni veiller à matines, et lorsqu'il voyait les autres moines être gais il déplorait de ne pouvoir être de même humeur. Enfin; lorsque, étant de nouveau dans la bibliothèque du couvent, il lut le chapitre XIII de l'Apocalypse, l'idée lui vint que la *bête* apocalyptique désignait le pape Léon X. Méditant sur le nombre apocalyptique 666, il pensait: Mon Dieu, quelle consolation, si l'on avait quelque calcul certain. Il trouvait bien, dans LEO DECIMVS, M.D.C.L.V.I, mais la lettre M était de trop, et il manquait la lettre X. pour faire 666. Or le nom peut s'écrire LEO X, et la lettre M peut signifier *mystérieux*; ayant fait cette découverte, il rentre dans sa cellule, se mit à genoux, remercia Dieu de cette consolation, et reprit courage. Ayant quitté le couvent et devenu prédicateur de la cour à Mansfeld, il montra ses calculs à Martin Luther, qui lui conseilla d'abandonner ces spéculations, qui n'avaient rien de certain. Toutefois, en 1532, menant une vie oisive, il poussa l'indiscrétion jusq'à publier un opuscole, où, interprétant les paroles de Daniel, il fixait l'heure et le jour de la fin du monde en octobre 1533. Quand on lui objectait les paroles du Christ. *De die autem illo vel horâ nemo scit* (Marc, XIII, 32), il répondait que Jésus, comme homme, le savait pourtant; mais il avoue s'être trompé, confesse son erreur devant Dieu et les hommes, se repent de n'avoir pas écouté les conseils de son cher Luther, et devint si ennémi des calculs (bien entendu prophétiques), que, pendant quatorze années, il n'aimait pas d'en entendre parler (1); il eut pourtant une rechute (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 267).

(1) Pleins de confiance dans cette prophétie, les paysans de sa cure se mirent à faire bombance et à dissiper tous leurs bien; trompés dans leur attente, ils voulurent tuer Stiffel, qui ne dut son salut qu'à l'intervention de Luther.

Nous signalons ces aberrations mentales, parce qu'elles sont instructives. La psychologie ne sera établie sur des fondements stables que lorsqu'on aura bien étudié les anomalies de l'esprit humain, et les influences indestructibles des idées telles qu'elles sont inoculées dans la molle cervelle des enfants. Les désordres tératologiques des formes et des fonctions répandent un grand jour sur la structure et la vie normales des êtres organisés.

Nota. Aux manuscrits de la Bibliothèque impériale (365, m. 4), il existe une traduction latine de l'ouvrage de Christophe Rudolf sous ce titre : *Arithmetica Christophori Rudolfi ab Jauer a germanica lingua in latinam a Christophoro Auvero, Petri Danesii mandato, Romae, anno Christi* 1540 *conversa.*

DIMOSTRAZIONE DELL'ULTIMO TEOREMA DI FERMAT.

NOTA

DEL PROF. LUIGI CALZOLARI.

1. Nell'equazione

$$(A) \qquad z^n = x^n + y^n$$

consideriamo dapprima i tre numeri x, y, z dotati soltanto delle due qualità, di essere positivi e reali. Si avrà evidentemente

$$z > x \,,\quad z > y \,,$$

supposto $n > 1$,

$$z < x + y \;;$$

Non si richiede di più per intendere che traducendo quei tre numeri in linee rette, con esse sarà sempre possibile costruire un triangolo: cosicchè chiamando X, Y, Z gli angoli rispettivamente opposti ai lati x, y, z avremo la nota relazione

$$(B) \qquad z^2 = x^2 - axy + y^2 \,,$$

dove si è posto per comodo $a = 2 \cos Z$.

Le due equazioni (A) e (B) devono dunque reggere insieme; ossia qualunque terna di valori soddisfacenti all'equazione (A) deve verificare anche l'equazione (B); e viceversa i valori che rendono soddisfatta l'equazione (A) vanno cercati fra quelli che verificano l'equazione (B).

2. È facilissimo mettere d'accordo le due equazioni quando $n = 1$, ed $n = 2$. Nel primo caso infatti basta rendere $x^2 - axy + y^2$ quadrato perfetto di $x + y$, e ciò si ottiene facendo $a = -2$, ossia $Z = 180°$: allora il triangolo

si riduce al limite; confondendosi i lati x, y posti per diritto col terzo z. Nel secondo conviene annullare a, prendendo $Z = 90°$.

3. Per qualsivoglia altro esponente n maggiore di 2, dico che l'angolo Z è sempre compreso fra 60° e 90°. Supponiamo $Z = 90°$; dall'equazione (B) si ricava

$$z^2 = x^2 + y^2$$

e moltiplicando per z^{n-2} viene

$$z^n = z^{n-2}\, x^2 + z^{n-2}\, y^2 :$$

d'altronde è

$$z^{n-2}\, x^2 + z^{n-2}\, y^2 > x^n + y^n ,$$

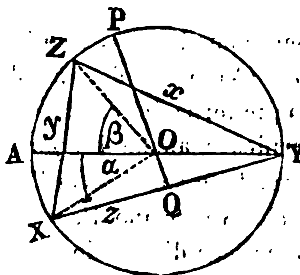
dunque risulterebbe

$$z^n > x^n + y^n .$$

Se fosse poi $Z > 90°$ a più forte ragione reggerebbe la precedente ineguaglianza. È forza quindi concludere

$$Z < 90° .$$

Ritengasi adesso $Z = 60°$; se gli altri due angoli X, Y sono uguali, ciascuno riesce di 60°, e verrebbe $x=y=z$, ciò che non sussiste; se sono disuguali, uno dei due sarà maggiore di 60°, quindi anche x od y maggiore di z; risultato egualmente inammissibile, a cui pure si giungerebbe supposto $Z < 60°$. Dunque dev'essere $Z > 60°$.



4. Circoscriviamo al triangolo la circonferenza XYZ: per Y si conduca il diametro AY, e dagli altri due angoli

X, Z i raggi OX, OZ, infine pel centro si tiri la PQ perpendicolare al lato z. Da quanto abbiamo detto nel numero precedente si deduce che α è un angolo compreso tra $\alpha = 0°$ ed $\alpha = 60°$: i limiti poi dell'angolo β saranno $\beta = \alpha$, a cui corrisponderebbe $x = z$, e $\beta = 90° - \frac{1}{2}\alpha =$ AOP, dove si avrebbe $x = y$. Un valor maggiore di β non farebbe che permutare tra loro le grandezze dei lati x, y. Preso pertanto ad arbitrio il lato z e l'angolo α, il vertice Z potrà occupare sulla circonferenza diverse posizioni entro i succitati limiti di β : vale a dire esistono diversi valori dei lati x, y che compongono diversi triangoli coll' angolo Z costante ed eguale a $90° - \frac{1}{2}\alpha$. Per tutti questi triangoli si verifica l'equazione (B), e fra di essi vanno determinati quelli che soddisfanno anche l'equazione (A).

5. Ciò posto, introduciamo adesso la condizione dei numeri x, y, z interi, ed indaghiamo se per un valore di z esistano i corrispondenti di x, y capaci di verificare l'equazione (A). Dall'ammessa condizione si deduce intanto 1.° Che per un dato angolo α il coefficiente costante a nell' equazione (B) è razionale: 2.° Che essendo una o più volte z^n divisibile per z^2, anche il binomio $x^n + y^n$ omogeneo di grado n coi coefficienti uguali all'unità, dovrà essere divisibile altrettante volte pel trimonio $x^2 - axy + y^2$ omogeneo di secondo grado, in cui il coefficiente del termine medio è razionale, e quelli degli estremi uguali ad uno.

Facciamo per brevità

$$x^n + y^n = P_n \ , \quad x^2 - axy + y^2 = P_2 \ ,$$

e suppongasi primamente n impari. Dividendo

$$z^n = P_n \text{ per } z^2 = P_2 \ ,$$

avremo

$$z^{n-2} = P_{n-2} \ ,$$

e P_{n-2} indicherà evidentemente un polinomio omogeneo in

x, y di grado $n-2$, nel quale i coefficienti dei termini estremi uguaglieranno l'unità, e gli altri un numero razionale. Continuando la divisione per $z^2=P_2$, nasceranno i quoti successivi

$$z^{n-4}=P_{n-4}\,,\quad z^{n-6}=P_{n-6}\,,\;\ldots\;z^3=P_3\,,$$

e P_{n-4}, P_{n-6}, ... P_3 rappresenteranno polinomii omogenei del grado indicato dagl' indici $n-4$, $n-6$, ... 3 tutti dotati della proprietà di avere i coefficienti estremi uguali ad uno, e gl' intermedii razionali. L' ultima divisione per $z^2=P_2$ somministra

$$z=P_1\,,$$

e dovendo essere P_1 un polinomio omogeneo di primo grado, anch'esso cogli estremi coefficienti uguali all'unità, avremo ad evidenza

$$z=P_1=x+y\,.$$

Questo valore finale è indipendente da a e quindi da α; si conserverà perciò sempre lo stesso qualunque sia α, nei limiti superiormente fissati. Fattane pertanto la sostituzione nell'equazione (A) dovrà reggere identicamente

$$(x+y)^n=x^n+y^n\,,$$

ciò che ha luogo soltanto per $n=1$.

Dunque, *l'equazione*

$$z^n=x^n+y^n$$

è impossibile in numeri interi per n impari e maggiore dell'unità.

6. Sia n pari e pongasi $n=2m$. Un discorso analogo al precedente mostrerà che l'equazione (A) è divisibile m volte per l'equazione (B). Laonde dovrà aversi identicamente

$$(x^2-axy+y^2)^m=x^{2m}+y^{2m}\,.$$

Lo sviluppo del primo membro conduce ad un polinomio della forma

$$x^{2m} + A_1 x^{2m-1} y + A_2 x^{2m-2} y^2 + \ldots + A_{2m-1} x y^{2m-1} + y^{2m},$$

e l'identità esige che sia

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0 \ldots \ldots A_{2m-1} = 0;$$

Il calcolo effettivo dà $A_1 = -am$, e non potendo annullarsi m, dev'essere

$$a = 0.$$

L'identità superiore diventa così

$$(x^2 + y^2)^m = x^{2m} + y^{2m},$$

che si verifica unicamente per $m = 1$.

Dunque, *l'equazione*

$$z^n = x^n + y^n$$

è impossibile per n pari maggiore di 2.

7. Una sola dimostrazione può abbracciare ambedue i casi di n pari e di n impari, partendo sempre dalla proprietà di essere P_n divisibile per P_2.

Il binomio dividendo P_n ha i coefficienti uguali all'unità il trinomio divisore P_2 ha pure l'unità per coefficienti nei termini estremi, e solamente razionale quello del termine medio. Ora il secondo non può dividere esattamente il primo, a meno che anche il coefficiente razionale a non sia intero (*). D'altronde, essendo

$$a = 2\cos Z$$

il suo valore non eccederà mai il numero 2: avremo quindi

$$a = 0, \quad a = \pm 1, \quad a = \pm 2,$$

a cui corrispondono gli angoli

(*) Questo teorema è dimostrato da Legendre nella teoria dei numeri per due polinomii ad una sola variabile; ma la sua dimostrazione si adatta facilmente anche al caso nostro.

$$90^\circ, \quad 60^\circ, \quad 120^\circ, \quad 0^\circ, \quad 180^\circ,$$

nessuno de' quali può essere uguale a Z quando $n > 2$ (n. 3). Dunque ecc.

8. Qui si presenta spontanea l' osservazione che il trinomio

$$x^2 - axy + y^2$$

divisore del binomio

$$x^n + y^n$$

ha la forma dei fattori quadratici di Cotes, e perciò deve aversi

$$a = 2\cos Z = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n},$$

vale a dire l' angolo Z oltr' essere dotato di coseno razionale è anche commensurabile coll'angolo retto. Tra gli angoli poi forniti di questa doppia qualità non vi sono che i cinque riportati nel numero precedente; onde si ricade nella medesima conseguenza.

9. Sia di nuovo $n = 2m$ e ferma l'ipotesi di x, y interi, supponiamo tale anche z^2 ma non z, cioè ritengasi z^2 intero non quadrato. Facendo $z^2 = z'$, le equazioni (A), (B) divengono

$$z'^m = x^{2m} + y^{2m}$$

$$z' = x^2 - axy + y^2.$$

Poichè z'^m continua ad ammettere m volte per divisore z', il raziocinio del num. 6 regge egualmente e si conclude l'impossibilità dell'equazione

$$z'^m = x^{2m} + y^{2m}$$

nelle medesime condizioni.

Dunque *la somma di due potenze di grado* 2m, *supposto* $m > 1$ *non può mai essere una potenza di grado* m.

10. Un simile teorema ha luogo per la differenza. Si scriva infatti l'equazione (A) sotto la forma

$$x^{2m} = z^{2m} - y^{2m},$$

e presa nel triangolo di lati x, y, z la relazione

$$x^2 = z^2 - bzy + y^2,$$

dove $b = 2\cos X$. supponiamo x^2 intero non quadrato; cosicchè posto $x^2 = x'$, abbiansi fra gl'interi x', y, z le equazioni

$$x'^m = z^{2m} - y^{2m}$$

$$x' = z^2 - bzy + y^2.$$

Partendo dai medesimi principii di cui abbiamo fatto uso nei num. 5 e 6 (fatta astrazione dal caso di $m=1$, a cui corrisponde un trigono rettangolo, ed invece della seconda equazione andrebbe presa $x' = z^2 - y^2$) dimostreremo facilmente che l'equazione

$$x'^m = z^{2m} - y^{2m}$$

non è possibile in numeri interi.

Dunque *la differenza di due potenze di grado* 2m, *supposito* $m > 1$, *non riesce mai una potenza di grado* m.

Questi due ultimi teoremi sono la generalizzazione di quelli di Fermat, in virtù de' quali è impossibile di rendere eguale ad un quadrato la somma o la differenza di due biquadrati.

INTORNO ALLE SUPERFICIE LE QUALI HANNO COSTANTE IL PRODOTTO DE' DUE RAGGI DI CURVATURA

NOTA

DEL PROF. DELFINO CODAZZI.

Il sig. Liouville, nella nota IV^{a} alla *Application de l'Analyse à la Géométrie* di Monge, considera le superficie, per le quali il prodotto de' due raggi di curvatura è costante e le riduce a tre gruppi distinti. L'uno di questi contiene le superficie sviluppabili; l'altro le sferiche; ed il terzo le superficie che possono adattarsi a quella di rivoluzione generata dalla linea avente le tangenti di lunghezza costante. In questa nota prendo a trattare lo stesso argomento in modo diverso da quello del sig. Liouville, ed espongo la risoluzione d'un triangolo qualunque formato in una superficie del terzo gruppo mediante l'intersezione di tre geodetiche.

1.

Rammento alcune formole, che serviranno in seguito.

Si assumano come coordinate curvilinee d'una superficie l'arco λ d'una geodetica passante per un punto dato, e l'angolo ω formato da essa con una geodetica fissa passante per lo stesso punto; oppure l'arco λ d'una geodetica normale ad una linea data, e l'arco ω di questa all'estremo del quale è condotta la prima. Chiamando s l'arco d'una linea qualunque tracciata nella superficie, F una funzione di λ, ω, ed indicando con apici le derivate prese rispetto ad una

variabile qualsivoglia, avremo in ambi i casi (*)

$$s'^2 = \lambda'^2 + F^2\omega'^2 . \tag{1}$$

Denominando θ l'angolo, che la linea qualunque fa col ramo della $\omega =$ cost. secondo il quale λ cresce, ρ il raggio di curvatura geodetica della medesima linea qualunque, ovvero il raggio della sfera avente con essa un contatto del second'ordine ed il centro nel piano tangente la superficie, sarà (**)

$$\frac{dF}{d\lambda}\omega' + \theta' = -\frac{s'}{\rho} ; \tag{2}$$

inoltre

$$\lambda' = s'\cos\theta , \quad \lambda'\tang\theta = F\omega' . \tag{3}$$

Se la linea d'arco s è geodetica la (2) diventerà

$$\frac{dF}{d\lambda}\omega' + \theta' = o . \tag{4}$$

Nel caso in cui le $\omega =$ cost. passano per un punto dato, abbiamo, quando $\lambda = o$,

$$F = 0 , \quad \frac{dF}{d\lambda} = 1 ; \tag{5}$$

e nel caso in cui esse sono perpendicolari ad una linea data, abbiamo, ancora quando $\lambda = o$,

$$F = 1 , \quad \frac{dF}{d\lambda} = -\frac{1}{\rho} ; \tag{6}$$

la seconda delle quali segue dalla (2). Infine, indicando con i l'unità divisa pel prodotto de' due raggi di curvatura della superficie, ed applicando alla (1) la formola di Gauss, risulta

(*) V. *Disquisitiones generales circa superficies curvas* di Gauss.

(**) V. la Nota II.ª del Sig. Liouville alla *Appl. de l'Anal. à la Géom.* di Monge.

$$(7) \qquad \frac{d^2F}{d\lambda^2} = -iF.$$

In quanto a'valori della i, nell'argomento che trattiamo, possono darsi i tre seguenti casi

$$i = 0, \quad i = \frac{1}{r^2}, \quad i = -\frac{1}{r^2};$$

ove r dinota una costante.

2.

Abbiasi in primo luogo

$$i = 0;$$

e le $\omega =$ cost. passino per un punto dato. La (7) integrata con riguardo alle (5) somministra

$$(8) \qquad F = \lambda;$$

perciò l'arco d'una linea qualunque della famiglia $\lambda =$cost. ha per valore

$$(9) \qquad \int_0^\omega F d\omega = \lambda\omega;$$

e l'area della porzione di superficie contenuta tra quest'arco e le due geodetiche corrispondenti agli angoli 0, ω ha per valore

$$(10) \qquad \int_0^\omega \int_0^\lambda F d\omega d\lambda = \frac{1}{2}\lambda^2\omega.$$

Le (9), (10) insegnano che la superficie or ora considerata può sovrapporsi al settore circolare di raggio λ e d'angolo ω dunque le superficie, per le quali $i=0$, saranno distendibili in un piano.

Se le $\omega =$ cost. sono perpendicolari ad una linea data, la (7) integrata con riguardo alle (6) fornisce

$$(11) \qquad F = 1 - \frac{\lambda}{\rho} .$$

Allora l'arco d'una linea qualunque della famiglia λ=cost. è dato da

$$(12) \qquad \int_0^\omega F d\omega = \omega - \lambda \int_0^\omega \frac{1}{\rho} d\omega$$

formola nota; e la porzione di superficie compresa tra questa linea, la $\lambda = 0$ e le due geodetiche normali ad esse è data da

$$(13) \qquad \int_0^\omega \int_0^\lambda F d\omega d\lambda = \lambda\omega - \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^\omega \frac{1}{\rho} d\omega$$

formola pure nota.

3.

In secondo luogo abbiasi

$$i = \frac{1}{r^2} ;$$

e le ω = cost. passino per un punto dato. Integrando la (7) con riguardo alle (5) s'ottiene

$$(14) \qquad F = r \operatorname{sen} \frac{\lambda}{r} ;$$

quindi l'arco della linea λ = cost. è dato da

$$(15) \qquad \int_0^\omega F d\omega = r\omega \operatorname{sen} \frac{\lambda}{r} ;$$

e l'area analoga a quella considerata la prima volta nel n. antecedente ha per valore

$$(16) \qquad \int_0^\omega \int_0^\lambda F d\omega d\lambda = r^2\omega \left(1 - \cos \frac{\lambda}{r}\right) .$$

Le (15), (16) insegnano che questa porzione di superficie

può sovrapporsi ad un triangolo tracciato sopra una sfera di raggio r, il quale abbia due lati eguali a due archi di circoli massimi di lunghezza λ, abbia l'angolo interposto eguale ad ω, ed abbia il terzo lato eguale ad un arco di circolo minore perpendicolare alla comune intersezione dei primi due. Dunque le superficie, per le quali $i = \frac{1}{r^2}$, sono le sferiche.

Se le $\omega =$ cost. sono perpendicolari ad una linea data, la (7) integrata con riguardo alle (6) somministra

$$(17)\qquad F = \cos\frac{\lambda}{r} - \frac{r}{\rho}\,\mathrm{sen}\,\frac{\lambda}{r}.$$

Allora l'arco della linea $\lambda =$ cost. ha per valore

$$(18)\qquad \int_0^\omega F d\omega = \omega\cos\frac{\lambda}{r} - r\,\mathrm{sen}\,\frac{\lambda}{r}\int_0^\omega \frac{1}{\rho}\,d\omega\,,$$

e l'area analoga a quella considerata la seconda volta nel n. antecedente è data da

$$(19)\qquad \int_0^\omega\int_0^\lambda F d\omega d\lambda = r\omega\,\mathrm{sen}\,\frac{\lambda}{r} - r^2\left(1 - \cos\frac{\lambda}{r}\right)\int_0^\omega \frac{1}{\rho}\,d\omega\,;$$

ove $\int \frac{1}{\rho}\,d\omega$ esprime il complesso degli angoli di contigenza di quella linea, nella quale si trasforma la $\lambda = 0$, quando la superficie sviluppabile tangente la sfera lungo la medesima è distesa in un piano.

4.

Abbiasi in terzo luogo

$$i = -\frac{1}{r^2},$$

e le $\omega =$ cost. passino per un punto dato. Si pongano per brevità

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} = p(t)\ ,\quad \frac{e^t + e^{-t}}{2} = q(t)\ ,$$

per cui

$$q^2(t) - p^2(t) = 1\ ;$$

$p(t)$, $q(t)$ sono ordinatamente il seno iperbolico ed il coseno iperbolico di t. Integrando la (8) con riguardo alle (5) risulta

$$(20)\qquad F = rp\left(\frac{\lambda}{r}\right)\ ,$$

perciò l'arco della linea $\lambda =$ cost. è dato da

$$(21)\qquad \int_0^\omega F d\omega = r\omega p\left(\frac{\lambda}{r}\right)\ ;$$

e l'area della porzione di superficie contenuta tra quest'arco e le due geodetiche normali è data da

$$(22)\qquad \int_0^\omega\int_0^\lambda F d\omega d\lambda = r^2\omega\left[q\left(\frac{\lambda}{r}\right) - 1\right]\ .$$

Se le $\omega =$ cost. sono perpendicolari ad una linea data, la (7) integrata con riguardo alle (6) fornisce

$$(23)\qquad F = q\left(\frac{\lambda}{r}\right) - \frac{r}{\rho}\, p\left(\frac{\lambda}{r}\right)\ .$$

Allora l'arco della linea $\lambda =$ cost. ha per valore

$$(24)\qquad \int_0^\omega F d\omega = \omega q\left(\frac{\lambda}{r}\right) - rp\left(\frac{\lambda}{r}\right)\int_0^\omega \frac{1}{\rho} d\omega\ ,$$

e l'area contenuta tra le linee $\lambda = 0$, $\lambda =$ cost. e le due geodetiche normali ad esse ha per valore

$$(25)\qquad \int_0^\omega\int_0^\lambda F d\omega d\lambda = r\omega p\left(\frac{\lambda}{r}\right) - r^2\left[q\left(\frac{\lambda}{r}\right) - 1\right]\int_0^\omega \frac{1}{\rho} d\omega\ ;$$

ove $\int \frac{1}{\rho} d\omega$ è, come sopra, il complesso degli angoli di contigenza della linea piana, in cui si trasfigura la $\lambda = 0$.

5.

Esaminiamo se la superficie considerata nel n. antecedente sia sovrapponibile ad una di rivoluzione. Si chiamino λ, x, y l'arco e le coordinate rettangole d'una linea piana la quale ruotando attorno all'asse delle x produca una superficie di rivoluzione; ω, y_0 l'arco ed il raggio dell'equatore; s l'arco della linea qualunque situata sulla superficie. Avremo

$$s'^2 = \lambda'^2 + \frac{y^2}{y_0^2}\omega'^2 ,$$

quindi, se la superficie del n. antecedente può combaciare con una di rivoluzione, sussisterà la

$$\frac{y}{y_0} = q\left(\frac{\lambda}{r}\right) ,$$

essendo per l'equatore $\frac{1}{\rho} = 0$. Da questa e dalla

$$\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 = 1$$

si deducono le due

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{1}{r}\sqrt{(y^2 - y^2_0)} , \quad \frac{dx}{d\lambda} = \frac{1}{r}\sqrt{(r^2 + y^2_0 - y^2)} ,$$

perciò l'equazione della linea generatrice tra le coordinate rettangole sarà

$$(26) \qquad x = \int \sqrt{\left(\frac{r^2 + y^2_0 - y^2}{y^2 - y^2_0}\right)} dy .$$

È questa l' equazione trovata dal sig. Liouville, la quale quando si ritenga $y_0 = 0$ diviene

$$x = \int \frac{\sqrt{(r^2 - y^2)}}{y} dy$$

ed esprime la linea dalle tangenti di lunghezza costante.

Concludiamo che la superficie per la quale $i = -\frac{1}{r^2}$ può sovrapporsi à quella di rivoluzione generata della linea (26) col ruotare attorno all'asse delle x.

6.

Troviamo le relazioni fra le quattro quantità λ, ω, s, θ nel caso in cui la s esprima l'arco d'una geodetica qualunque situata nella superficie per la quale $i = -\frac{1}{r^2}$.

Quando $\omega = 0$, abbiansi $\lambda = a$, $s = 0$, $\theta = \pi - \beta$; ove a, β sono costanti, e β dinota l'angolo compreso tra s e quel ramo della linea $\omega = 0$ secondo il quale λ decresce. Ora la (4) mediante la seconda (3) e la (20) diviene

$$\left[p\left(\frac{\lambda}{r}\right)\operatorname{sen}\theta\right]' = 0 \quad ,$$

da cui si trae

$$p\left(\frac{\lambda}{r}\right)\operatorname{sen}\theta = p\left(\frac{a}{r}\right)\operatorname{sen}\beta \quad . \tag{27}$$

Quest'equazione somministra

$$q\left(\frac{\lambda}{r}\right) = \frac{\sqrt{\left(\operatorname{sen}^2\theta + p^2\left(\frac{a}{r}\right)\operatorname{sen}^2\beta\right)}}{\operatorname{sen}\theta}$$

la quale riduce (4) alla seguente

$$\omega' + \frac{\operatorname{sen}\theta\theta'}{\sqrt{\left[\operatorname{sen}^2\theta + p^2\left(\frac{a}{r}\right)\operatorname{sen}^2\beta\right]}} = 0 \ .$$

Ne segue per mezzo dell'integrazione

$$q\left(\frac{a}{r}\right)\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\omega = \cos\beta\cos\omega + \cos\theta \ . \tag{28}$$

La stessa (27) fornisce

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{\left[p^2\left(\frac{\lambda}{r}\right) - p^2\left(\frac{a}{r}\right)\operatorname{sen}^2\beta\right]}}{p\left(\frac{\lambda}{r}\right)},$$

la quale riduce la prima (3) alla seguente

$$s' = -\frac{p\left(\frac{\lambda}{r}\right)\lambda'}{\sqrt{\left[p^2\left(\frac{\lambda}{r}\right) - p^2\left(\frac{a}{r}\right)\operatorname{sen}^2\beta\right]}}.$$

Integrando se ne conclude

$$(29) \qquad \cos\beta\, p\left(\frac{a}{r}\right) p\left(\frac{s}{r}\right) = q\left(\frac{a}{r}\right) q\left(\frac{s}{r}\right) - q\left(\frac{\lambda}{r}\right).$$

Le (27), (28), (29) sono le relazioni che si volevano trovare.

7.

Da ultimo, risolviamo il triangolo formato nella superficie; per la quale $i = -\frac{1}{r^2}$, dall'intersezione di tre geodetiche disposte comunque.

Si chiamino a, b, c i tre lati del triangolo; A, B, C ordinatamente i tre angoli ad essi opposti. Dalla (27) si concludono le

$$(30) \qquad \frac{p\left(\frac{a}{r}\right)}{\operatorname{sen}A} = \frac{p\left(\frac{b}{r}\right)}{\operatorname{sen}B} = \frac{p\left(\frac{c}{r}\right)}{\operatorname{sen}C};$$

le quali insegnano che i seni iperbolici de' rapporti tra i lati e la quantità r sono proporzionali a'seni degli angoli opposti a' medesimi lati. Dalla (28) si deducono le tre

$$(31)\begin{cases} \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C\,q\left(\frac{a}{r}\right) = \cos B\cos C + \cos A\,, \\ \operatorname{sen}C\operatorname{sen}A\,q\left(\frac{b}{r}\right) = \cos C\cos A + \cos B\,, \\ \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\,q\left(\frac{c}{r}\right) = \cos A\cos B + \cos C\,; \end{cases}$$

le quali servono ad esprimere ciascun lato in funzione dei tre angoli. Infine dalla (29) si traggono le tre

$$(32)\begin{cases} p\left(\frac{b}{r}\right)p\left(\frac{c}{r}\right)\cos A = q\left(\frac{b}{r}\right)q\left(\frac{c}{r}\right) - q\left(\frac{a}{r}\right)\,, \\ p\left(\frac{c}{r}\right)p\left(\frac{a}{r}\right)\cos B = q\left(\frac{c}{r}\right)q\left(\frac{a}{r}\right) - q\left(\frac{b}{r}\right)\,, \\ p\left(\frac{a}{r}\right)p\left(\frac{b}{r}\right)\cos C = q\left(\frac{a}{r}\right)q\left(\frac{b}{r}\right) - q\left(\frac{c}{r}\right)\,; \end{cases}$$

le quali servono ad esprimere ciascun angolo in funzione de' tre lati. Balza agli occhi da sè l'analogia tra le (30), (31), (32) e le formole della trigonometria sferica; quando si faccia $r = \sqrt{-1}$ le prime si mutano nelle seconde.

Osserviamo che gli angoli A, B, C non sono affatto indipendenti tra di loro, perocchè, se mediante una qualunque delle (31) si scrive che il quadrato del coseno iperbolico è maggiore dell'unità, si trova

$$(33)\quad \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C > 1.$$

Così pure i lati a, b, c non sono affatto indipendenti l'uno dall'altro, perocchè, se mediante una qualunque delle (32) si scrive che il quadrato del coseno dell' angolo è minore dell'unità, si trova

$$(34)\quad q^2\left(\frac{a}{r}\right) + q^2\left(\frac{b}{r}\right) + q^2\left(\frac{c}{r}\right) < 1 + 2q\left(\frac{a}{r}\right)q\left(\frac{b}{r}\right)q\left(\frac{c}{r}\right).$$

Pavia, dicembre 1857.

RICERCHE ANALITICHE SULLE CURVE CONICHE CIRCOSCRITTE AD UN TRIANGOLO

DI BARNABÀ TORTOLINI.

(Ottobre 1857)

1. Mi propongo in questo breve scritto di richiamare con facili dimostrazioni alcuni risultati per la maggior parte noti, i quali si riferiscono ad una curva conica obbligata a passare per tre punti dati. Io mi fermerò sopra tutto a riconoscere la grandezza, e la posizione di quel circolo circoscritto al triangolo, e che passerà per i tre punti della curva: come è chiaro la questione si ridurrà alla determinazione del raggio e delle coordinate del centro. Un circolo individuato in questa guisa sarà completamente determinato, e nel caso, che i tre punti si riuniscano in un solo si otterranno le note espressioni del raggio di curvatura, e delle coordinate del centro del circolo osculatore. Per maggior chiarezza a quanto sono per esporre farò ancora un cenno sopra alcune espressioni dell'area di un triangolo, e del raggio di quel circolo ad esso circoscritto.

2. Siano A, B, C i tre lati di un triangolo ed α, β, γ gli angoli opposti; R il raggio di quel circolo, che passa per i tre vertici del triangolo, si avrà evidentemente per il valor comune del rapporto dei lati ai seni

$$\frac{A}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{B}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{C}{\operatorname{sen}\gamma}=2R\,.$$

Di più per la superficie S del triangolo di lati A, B, C si ha come è noto

$$2S = AB\,\mathrm{sen}\gamma = AC\,\mathrm{sen}\beta = BC\,\mathrm{sen}\alpha$$

d'onde si trae per esempio

$$R = \frac{C}{2\,\mathrm{sen}\gamma} = \frac{A.B.C}{2AB\,\mathrm{sen}\gamma}\,.$$

Di qui

$$R = \frac{ABC}{4S}\,.$$

Cioè il raggio del circolo circoscritto ad un triangolo rettilineo è uguale al prodotto dei tre lati diviso per il quadruplo della superficie: giova in alcune applicazioni di esprimere il valore della superficie S in funzione delle coordinate dei tre vertici.

3. Immaginiamo due assi ortogonali delle x, y e dall'origine O conduciamo a due punti M, N di coordinate x', y', x'', y'' le rette r', r'', in modo da essere

$$OM = r' = \sqrt{(x'^2 + y'^2)},\ ON = r'' = \sqrt{(x''^2 + y''^2)}$$

Le coordinate $x'\,y'$, $x''\,y''$ incontrino l'asse delle x in due punti P, Q, per cui sia

$$MP = y'\ ,\quad OP = x' \quad NQ = y''\ ,\quad QO = x''\ :$$

ciò posto la superficie del triangolo OMN sarà eguale alla superficie del quadrilatero OMNQO meno il triangolo ONQ, ma il quadrilatero OMNQO è eguale al triangolo OMP più il trapezio MPQN, d'onde per la superficie S del triangolo OMN si avrà

$$2S = x'y' + (y' + y'')(x'' - x') - x''y''$$

ovvero

$$2S = y'x'' - x'y''$$

L'angolo NOM formato dai raggi vettori r', r'' è definito dall'equazione

$$\cos MON = \frac{x'x'' + y'y''}{r'r''},$$

d'onde

$$\text{sen}MON = \frac{\sqrt{(y'x'' - x'y'')^2}}{r'r''} = \pm \frac{(y'x'' - x'y'')}{r'r''},$$

e perciò il doppio dell'area del detto triangolo sarà

$$2S = r'r''\text{sen}MON = \pm (y'x'' - x'y'')$$

Di qui si vede, che potrà essere dotata dal segno +, o —, secondo la sua posizione rispetto agli assi. Intendiamo prolungata la retta NM, la quale incontrerà l'asse della y in un punto H alla distanza b dall'origine, per cui lo stesso triangolo OMN sarà eguale al triangolo ONH meno il triangolo OMH, ossia

$$2S = bx'' - bx' = b(x'' - x')$$

la retta indefinita NMH nei punti M, N, verificherà le due equazioni

$$y' = ax' + b, \quad y'' = ax'' + b,$$

dalle quali si trae

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}, \quad b = \frac{y'x'' - x'y''}{x'' - x'},$$

ed avremo nuovamente

$$2S = b(x'' - x') = y'x'' - x'y''.$$

Che se il triangolo sia collocato in un modo qualunque nel piano degli assi in guisa che le coordinate dei tre vertici siano (x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2), in allora è chiaro, che per ottenere l'area in funzione delle coordinate dei tre vertici basterà nel precedente valore di 2S sostituire

$$x_1 - x_0, \; x_2 - x_0, \; y_1 - y_0, \; y_2 - y_0$$

invece di x', x'', y', y'' e si avrà

$$2S = (y_1 - y_0)(x_2 - x_0) - (x_1 - x_0)(y_2 - y_0)$$

la quale si ridurrà ad

$$2S = (y_1 x_2 - x_1 y_2) + (x_0 y_2 - y_0 x_2) + (x_1 y_0 - y_1 x_0) .$$

Ognuna delle quantità chiuse fra parentisi è l'area di un triangolo col comun vertice all'origine, ma una di queste si avrà da considerare come negativa, quando si rifletta che conducendo dall'origine i tre raggi ai punti (x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2), l'area del nostro triangolo è eguale alla differenza della somma di due aree sopra la terza.

4. L'espressione $x''y' - y''x'$ è una funzione alternata delle quattro quantità x', x'', y', y'', ma è ancora il *determinante* delle medesime, e secondo l'uso comune di scrivere si ha

$$y'x'' - x'y'' = \begin{vmatrix} y', & x' \\ y'', & x'' \end{vmatrix} .$$

Di più si scorge che è anche un *Invariante* e se ne ha una facile verificazione col passare da un sistema di coordinate ad altre della stessa specie: immaginiamo due nuovi assi rettilinei delle X, Y, e poniamo per gli angoli

$$(X,x) = \alpha,\ (Y,x) = \beta,\quad (x,y) = 90^\circ,\ (X,Y) = \theta$$

si avrà dalla trasformazione delle coordinate con la medesima origine

$$x' = X'\cos\alpha + Y'\cos\beta ,\quad x'' = X''\cos\alpha + Y''\cos\beta .$$

$$y' = X'\operatorname{sen}\alpha + Y'\operatorname{sen}\beta ,\quad y'' = X''\operatorname{sen}\alpha + Y''\operatorname{sen}\beta$$

e si troverà senza difficoltà

$$y'x'' - x'y'' = (\cos\alpha\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha\cos\beta)(Y'X'' - X'Y'') .$$

od anche

$$y'x'' - x'y'' = \text{sen}(\beta - \alpha)(Y'X'' - X'Y'')$$

L'angolo $\beta - \alpha$ è quello dei nuovi assi, che se questi pure siano rettangolari, si avrà

$$y'x'' - x'y'' = Y'X'' - X'Y''$$

il che accade nelle forme *invarianti*. Introduciamo nelle ritrovate formole l'uso dei simboli delle differenze finite. Siano x, y le coordinate ortogonali di un punto situato nel perimetro di una curva data, come $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ rappresentino le coordinate di un altro punto, e quindi per una nuova variazione, siano $x + 2\Delta x + \Delta^2 x$, $y + 2\Delta y + \Delta^2 y$, le coordinate di un terzo punto successivo: se questi due ultimi punti si riferiscano al punto (x,y) scelto come origine, é evidente in allora, che il doppio dell'area del triangolo formato dal congiungimento dei tre punti sarà

$$2S = \Delta y(2\Delta x + \Delta^2 x) - \Delta x(2\Delta y + \Delta^2 y)$$

ossia

$$2S = \Delta y\Delta^2 x - \Delta x\Delta^2 y$$

Qui pure il secondo membro potrebbe esser dotato del segno $+$, o $-$, secondo la posizione del triangolo, cioè

$$2S = \pm(\Delta y\Delta^2 x - \Delta x\Delta^2 y),$$

I tre lati A, B, C del triangolo si esprimeranno per

$$A = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}\,,\quad B = \sqrt{[(2\Delta x + \Delta^2 x)^2 + (2\Delta y + \Delta^2 y)^2]}$$

$$C = \sqrt{[(\Delta x + \Delta^2 x)^2 + (\Delta y + \Delta^2 y)^2]}.$$

Queste differenti formole trovano un utile applicazione nella teorica delle curve piane, e nelle coniche in particolare.

5. In una curva piana, scegliamo adunque tre punti

$$(x,y),\ [(1+\Delta)x,\ (1+\Delta)y],\ [(1+\Delta)^2 x,\ (1+\Delta)^2 y]\ ,$$

Il raggio R del circolo, che passerà per questi tre punti sarà per le formole precedenti

$$R = \pm \frac{A.B.C}{2(\Delta x \Delta^2 y - \Delta y \Delta^2 x)}$$

ove A, B, C sono espressi per Δx, . . . come dal precedente paragrafo. Poniamo per brevità

$$\varepsilon = \frac{4(\Delta x \Delta^2 x + \Delta y \Delta^2 y) + (\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2}{4(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{2(\Delta x \Delta^2 x + \Delta y \Delta^2 y) + (\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

si avrà

$$B = 2A(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}, \quad C = A(1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{2}}$$

d'onde

$$A.B.C = 2(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{3}{2}}(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{2}}$$

per cui

$$R = \pm \frac{[(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon_1)]^{\frac{1}{2}}(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}{\Delta x \Delta^2 y - \Delta y \Delta^2 x}$$

Passando dalle differenze ai differenziali, o alle derivate, si ottiene la formola notissima per il raggio di curvatura, vale a dire

$$R = \pm \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x} = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} .$$

Il sig. *Brassine* (Terquem Annales vol. 6.° pag. 228) estende queste considerazioni per le curve anche a doppia curvatura: da quanto si è detto si trae una rappresentazione geometrica delle derivate seconde, o per essa si ha

$$y'' = \lim. \frac{\Delta x \Delta^2 y - \Delta y \Delta^2 x}{\Delta x^3} = \lim. \frac{2S}{\Delta x^3}$$

Insistendo sull' uso dei simboli delle differenze finite scegliamo delle speciali applicazioni.

6. In un ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

adottiamo la sostituzione sferica

$$x = a\cos\varphi\,,\quad y = b\operatorname{sen}\varphi$$

e si prenda l'angolo φ per variabile indipendente per cui costante sia l'incremento $\Delta\varphi$, che rappresenteremo con θ, si avrà

$$\Delta x = -\,2a\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta\operatorname{sen}(\varphi + \tfrac{1}{2}\theta)$$

$$\Delta y = 2b\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta\cos(\varphi + \tfrac{1}{2}\theta)$$

nella stessa guisa per le differenze seconde

$$\Delta^2 x = -\,4a\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\theta\cos(\varphi + \theta)$$

$$\Delta^2 y = -\,4b\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\theta\operatorname{sen}(\varphi + \theta)$$

Di qui l'area del triangolo inscritto nell'ellisse avrà per valore

$$S = 4ab\operatorname{sen}^3\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta = 2ab\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\theta$$

come per il raggio del circolo circoscritto, si trae

$$R = \frac{ABC}{8ab\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\theta}\ .$$

Il valore di S è d'accordo con quanto trova il Sig. *Salmon* [Sections coniques al parag. 236 nell'esempio 5° (*)]. L'ottenuta espressione del raggio R si ridurrà più semplice con introdurci i semidiametri dell'ellisse paralleli ai lati A,B,C. Sia infatti a_1 un semidiametro parallelo ad A, e chiamiamo X, Y le coordinate dell' estremità a_1, si avrà simultaneamente

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1\,,\quad a_1^2 = X^2 + Y^2\ ;$$

(*) Quest'opera è stata tradotta in lingua Italiana in Napoli. Tipografia militare 1857: il valore di S corrisponde alla pagina 194 esemp. 5.°

ed

$$\frac{X}{\Delta x}=\frac{Y}{\Delta y}=\frac{a_1}{A}$$

d'onde

$$X=\frac{a_1\Delta x}{A}\,,\ Y=\frac{a_1\Delta y}{A}\ .$$

Dividendo X per a, ed Y per b e facendo la somma dei quadrati, si ricaverà

$$\frac{a^2_1}{A^2}\left(\frac{\Delta x^2}{a^2}+\frac{\Delta y^2}{b^2}\right)=1\ .$$

D'altronde dai valori di Δx, Δy di già trovati al principio di questo parag., abbiamo

$$\frac{\Delta x^2}{a^2}+\frac{\Delta y^2}{b^2}=4\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\theta$$

perciò si ricaverà dalla sostituzione

$$A=2a_1\text{sen}\tfrac{1}{2}\theta,$$

Nella stessa guisa si troverebbe

$$B=2b_1\text{sen}\theta\,,\quad C=2c_1\text{sen}\tfrac{1}{2}\theta\ .$$

Sostituendo questi valori nella precedente espressione di R, si ricaverà

$$R=\frac{a_1b_1c_1}{ab}\ .$$

Cioè il raggio del circolo, che passa per i tre punti di un ellisse è eguale al prodotto dei tre semidiametri paralleli ai tre lati del triangolo diviso per il prodotto dei semiassi principali. Questo risultato è dovuto a *Mac-Cullagh*. Sarebbe poi facile il calcolare i valori di A, B, C del paragr. 4° dietro l'espressioni di Δx, $\Delta^2 x$. . . come quei di a_1, b_1, c_1, per i quali si ha

$$a_1^2 = a^2\text{sen}^2(\varphi + \tfrac{1}{2}\theta) + b^2\cos^2(\varphi + \tfrac{1}{2}\theta)$$

$$b_1^2 = a^2\text{sen}^2(\varphi + \theta) + b^2\cos^2(\varphi + \theta)$$

$$c_1^2 = a^2\text{sen}^2(\varphi + \frac{3}{2}\theta) + b^2\cos^2(\varphi + \frac{3}{2}\theta)$$

Di qui pure i valori di A, B, C.

7. Al ritrovato valore di R si può dare un altra forma, la quale si estende a tutte tre le curve coniche: il che si ottiene con introdurci le tre corde focali c', c'', c''' parallele ai semidiametri a_1, b_1, c_1. Sia p il parametro e c la distanza del fuoco dal centro, v l'angolo che un raggio r con l'origine al fuoco fà con l'asse $2a$, si avrà

$$c = \sqrt{(a^2 - b^2)}, \quad r = \frac{b^2}{a + c.\cos v}$$

per il raggio r' diametralmente opposto, si ha

$$r' = \frac{b^2}{a - c.\cos v}$$

la corda focale $c' = r + r'$, il che porge

$$c' = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2\cos^2 v}$$

Ciò posto siano x_1, y_1 le coordinate di un punto della curva, per le quali si abbia

$$\text{tang} v = \frac{y_1}{x_1}$$

Le x_1, y_1 per la relativa sostituzione sferica, verificano i valori

$$x_1 = a\cos\omega, \quad y_1 = b\text{sen}\omega$$

per cui

$$\tang v = \frac{b \operatorname{sen}\omega}{a \cos\omega}$$

d'onde si trae

$$\cos^2 v = \frac{a^2\cos^2\omega}{a^2\cos^2\omega + b^2\operatorname{sen}^2\omega},$$

quale valore sostituito nel secondo membro di c' essa diviene

$$c' = 2\,\frac{(a^2\cos^2\omega + b^2\operatorname{sen}^2\omega)}{a}$$

Onde la corda focale c' sia parallela al semidiametro a_1 converrà supporre $\omega = \varphi + \frac{1}{2}\theta$, per cui come dall'ultime formole del parag. 6, si ottiene

$$c' = \frac{2a_1^2}{a}, \quad a_1^2 = \frac{ac'}{2}$$

e nella stessa guisa

$$c'' = \frac{2b_1^2}{a}, \quad c''' = \frac{2c_1^2}{a}, \quad b_1^2 = \frac{ac''}{2}, \quad c_1^2 = \frac{ac'''}{2}$$

Formiamo il quadrato del raggio R cioè

$$R^2 = \frac{a_1^2 b_1^2 c_1^2}{a^2 b^2}$$

e sostituiamoci i valori di a_1^2, b_1^2, c_1^2 si avrà

$$R^2 = \frac{ac'c''c'''}{8b^2}$$

Infine per il parametro $p = \frac{2b^2}{a}$, si ridurrà ad

$$R^2 = \frac{c'c''c'''}{4p}$$

Ed in tutte tre le curve coniche, il quadrato del raggio del circolo, che passa per tre punti della curva è eguale al prodotto delle tre corde focali diviso per il quadruplo del parametro. Questo risultato è dovuto ancora a *Mac-Cullagh.* Facendo poi uso di uno qualunque dei due valori di R potremo da esso dedurre l'espressione generale del raggio del circolo osculatore per tutte le curve coniche: infatti riunendosi i tre punti in un sol punto si avrà $a_1 = b_1 = \rho_1$ per cui dal valore di R del parag. 6°, si ricaverà

$$R = \frac{a_1^3}{ba}$$

Sia a_2 il semiasse conjugato ad a_1 ed ω l'angolo dei medesimi, si ha

$$a_1 a_2 \operatorname{sen}\omega = ab$$

d'onde

$$R = \frac{a_1^3}{ab} = \frac{a^2{}_1 . a_1}{ab} = \frac{a_1^2}{a_2 \operatorname{sen}\omega} = \frac{p_1}{2\operatorname{sen}\omega}$$

ove p_1 rappresenta il parametro riferito ai due semidiametri conjugati a_1, a_2. Quest'espressione come è noto è comune a tutte le curve coniche.

8. Occupiamoci ora della posizione del centro del circolo con determinarne le coordinate X, Y.

Per i tre punti della curva

$$(x, y),\ [(1+\Delta)x,\ (1+\Delta)y],\ [(1+\Delta)^2x,\ (1+\Delta)^2y],$$

avremo per il circolo, che passa per i detti tre punti le tre equazioni

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = R^2$$

$$(x - X + \Delta x)^2 + (y - Y + \Delta y)^2 = R^2$$

$$(x - X + 2\Delta x + \Delta^2 x)^2 + (y - Y + 2\Delta y + \Delta^2 y)^2 = R^2.$$

Sottraendo la prima dalla seconda, e dalla terza si otten-

gono le due equazioni di condizione

$$(1)\begin{cases} 2X + \dfrac{2\Delta y}{\Delta x}.Y = 2x + \Delta x + \dfrac{(2y + \Delta y)\Delta y}{\Delta x} \\ 2X + 2\,\dfrac{(2\Delta y + \Delta^2 y)}{2\Delta x + \Delta^2 x}.Y = 2x + 2\Delta x + \Delta^2 x \\ \qquad + \dfrac{(2y + 2\Delta^2 y)(2\Delta y + \Delta^2 y)}{2\Delta x + \Delta^2 x} \end{cases}$$

Sostituiamoci per l'ellisse i valori di già trovati di y, x, e delle loro differenze al principio del parag.6, e tutti espressi per gli angoli φ,θ, le precedenti equazioni (1) diverranno

$$2X - \frac{2b}{a}\,Y\cot(\varphi + \tfrac{1}{2}\theta) = a[\cos\varphi + \cos(\varphi + \theta)]$$

$$+ \frac{b^2}{a}\,\frac{(\mathrm{sen}(\varphi + \theta) + \mathrm{sen}\varphi)(\mathrm{sen}(\varphi + \theta) - \mathrm{sen}\varphi)}{\cos(\varphi + \theta) - \cos\varphi}$$

$$2X - 2\,\frac{b}{a}\,Y\cot(\varphi + \theta) = a[\cos\varphi + \cos(\varphi + 2\theta)]$$

$$+ \frac{b^2}{a}\,\frac{(\mathrm{sen}(\varphi + 2\theta) + \mathrm{sen}\varphi)(\mathrm{sen}(\varphi + 2\theta) - \mathrm{sen}\varphi)}{\cos(\varphi + 2\theta) - \cos\varphi}$$

Ora è facile di riconoscere dalle formole trigonometriche, che il coefficiente di $\frac{b^2}{a}$ in ambedue l'equazioni è eguale al coefficiente di a preso con il segno contrario, per cui si ridurranno ad

$$2X - \frac{2b}{a}\,Y\cot(\varphi + \tfrac{1}{2}\theta) = \frac{a^2 - b^2}{a}\,[\cos\varphi + \cos(\varphi + \theta)]$$

$$2X - \frac{2b}{a}\,Y\cot(\varphi + \theta) = \frac{a^2 - b^2}{a}\,[\cos\varphi + \cos(\varphi + 2\theta)]$$

Queste due equazioni di primo grado rispetto ad X, ed Y son quelle, che per l'eliminazione ci somministrano i valori delle coordinate X, Y del centro di quel circolo, che passa per tre punti di un'ellisse: questi valori sono

$$X = \alpha\cos(\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi)[\cos\tfrac{1}{2}\theta - \text{sen}(\varphi + \theta)\text{sen}(\varphi + \tfrac{3}{2}\theta)]$$

$$Y = -\beta\,\text{sen}(\varphi + \tfrac{1}{2}\theta)\text{sen}(\varphi + \theta)\text{sen}(\varphi + \tfrac{3}{2}\theta)$$

ove per brevità

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a}, \quad \beta = \frac{a^2 - b^2}{b}$$

Se nel secondo membro si ponga $\theta = 0$, i precedenti valori divengono

$$X = \frac{(a^2 - b^2)}{a}\cos^3\varphi, \quad Y = -\frac{(a^2 - b^2)}{b}\text{sen}^3\varphi$$

i quali come è noto rappresentano nell'ellisse le coordinate del centro del suo circolo osculatore. Il problema di determinare le coordinate del centro ed il raggio di quel circolo, che passa per tre punti di un'ellisse, di un'iperbola, e di una perabola, col far uso nelle prime due della sostituzione sferica, fu già da lungo tempo il soggetto di una elegante Memoria del sig. Prof. *Strehlke* di Danzig nel tom. 2. del giornal di *Crelle* per l'anno 1827 pag. 380, e seg. che anzi l'autore suppone ineguali i diversi intervalli dell' angolo φ per un punto ad altro dell' ellisse, per cui se pongasi

$$\varphi' = \varphi + \theta, \quad \varphi'' = \varphi' + \theta = \varphi + 2\theta$$

i riportati valori di X, Y si cangieranno in

$$X = \alpha\cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')[\cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi') - \text{sen}\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi'')\text{sen}\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'')]$$

$$Y = -\beta\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\text{sen}\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'')\text{sen}\tfrac{1}{2}(\varphi'' + \varphi)$$

In queste converrebbe porre

$$\varphi = \varphi' = \varphi'', \; 2\varphi = \lambda = \mu = \nu$$

per il circolo osculatore l'ellisse.

9. Nell'iperbola con l'origine al centro, e riferita ai suoi assi principali, si ha l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Essa vien soddisfatta evidentemente dalla sostituzione trigonometrica

$$x = a\sec\varphi\,, \quad y = b\,\mathrm{tang}\varphi$$

od anche

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}\,, \quad y = \frac{b\,\mathrm{sen}\varphi}{\cos\varphi}$$

Si determinino i valori di Δx, Δy, $\Delta^2 x$, $\Delta^2 y$, si ricaverà primieramente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b}{a}\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\mathrm{sen}(\varphi + \frac{1}{2}\theta)}$$

$$2x + \Delta x = a\left(\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\cos(\varphi + \theta)}\right)$$

$$\frac{(2y + \Delta y)\Delta y}{\Delta x} = \frac{b^2}{a}\left(\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\cos(\varphi + \theta)}\right)$$

d'onde la prima dell'equazioni (1) del precedente parag. 8 diverrà

$$2\mathrm{X} + \frac{2b}{a}\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\mathrm{sen}(\varphi + \frac{1}{2}\theta)}\mathrm{Y} = \frac{a^2 + b^2}{a}\left(\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\cos(\varphi + \theta)}\right)$$

Nella stessa guisa la (2) porgerebbe

$$2\mathrm{X} + \frac{2b}{a}\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}(\varphi + \theta)}\mathrm{Y} = \frac{a^2 + b^2}{a}\left(\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\cos(\varphi + 2\theta)}\right)$$

Da queste due con la sottrazione, e successiva sostituzione otteniamo i valori di Y, X, dopo aver posto

$$\beta = \frac{a^2 + b^2}{b}, \quad \alpha = \frac{a^2 + b^2}{a}$$

cioè

$$Y = -\beta \frac{\operatorname{sen}(\varphi + \frac{1}{2}\theta)\operatorname{sen}(\varphi + \theta)\operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{3}{2}\theta\right)}{\cos\varphi\cos(\varphi + \theta)\cos(\varphi + 2\theta)}$$

$$X = \alpha\cos\tfrac{1}{2}\theta \frac{\left[\operatorname{sen}(\varphi + \theta)\operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{3}{2}\theta\right) + \cos(\varphi + 2\theta)\cos(\varphi + \frac{1}{2}\theta)\right]}{\cos\varphi\cos(\varphi + \theta)\cos(\varphi + 2\theta)}$$

Qui pure supponendo

$$\varphi' = \varphi + \theta, \quad \varphi'' = \varphi' + \theta = \varphi + 2\theta,$$

gli ottenuti valori di X, Y si trasformeranno in

$$Y = -\beta \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi'')\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi'' + \varphi)}{\cos\varphi\cos\varphi'\cos\varphi''}$$

$$X = \alpha\cos\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) \frac{\left[\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi + \varphi'')\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') + \cos\varphi''\cos\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)\right]}{\cos\varphi\cos\varphi'\cos\varphi''}$$

Tali sono eziandio l' espressioni, che trova il citato Prof. *Strehlke* alla pag. 384 del giornale di *Crelle* vol. 2, 1827: la supposizione poi di $\varphi = \varphi' = \varphi''$ riduce le precedenti ad

$$Y = -\frac{(a^2 + b^2)}{b}\operatorname{tang}^3\varphi, \quad X = \frac{(a^2 + b^2)}{a}\sec^3\varphi$$

che appartengono al centro del circolo osculatore.

10. Prendiamo in ultimo una parabola di parametro p riferita agli assi principali, avremo per i tre punti della curva, le tre equazioni

$$y^2 = px, \quad (y + \Delta y)^2 = p(x + \Delta x)$$

$$(y + 2\Delta y + \Delta^2 y)^2 = p(x + 2\Delta x + \Delta^2 x)$$

le quali porgono facilmente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{x}+\sqrt{[(x+\Delta x)]}}, \quad \frac{(2\Delta y+\Delta^2 y)\Delta y}{\Delta x}=p.$$

per cui l'equazioni (1) del parag. 8 diverranno

$$2X+\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{x}+\sqrt{[(x+\Delta x)]}}Y=x+x+\Delta x+p$$

$$2X+\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{x}+\sqrt{[(x+2\Delta x+\Delta^2 x]}}Y=x+x+2\Delta x+\Delta^2 x+p$$

E ponendo in esse per brevità

$$x+\Delta x=x_1, \quad y+\Delta y=y_1$$

$$x+2\Delta x+\Delta^2 x=x_2, \quad y+2\Delta y+\Delta^2 y=y_2$$

si troverà dall'eliminazione per i valori delle coordinate del centro.

$$Y=-\frac{1}{2\sqrt{p}}(\sqrt{x}+\sqrt{x_1})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})(\sqrt{x}+\sqrt{x_2})$$

$$2X=p+x+x_1+x_2+\sqrt{xx_1}+\sqrt{xx_2}+\sqrt{x_1x_2}$$

quali si ritrovano egualmente nella citata Memoria del sig. Strehlke pag. 384 Giornal di Crelle vol. 2. Fra le molte memorie scritte dai Geometri sull'iscrizione, e circoscrizione delle curve coniche ai poligoni, ed al triangolo in particolare io ne' citero una del sig. Prof. A. Genocchi inserita nel tom. 3 di questi Annali pag. 370, 1852, ed un'altra del sig. Prof. F. Brioschi nel tom. 4. dei d. Annali pag. 457.

DELLA SUPERFICIE E DEL VOLUME SFERICO COMPRESO FRA LA INTERSECAZIONE DELLA SFERA ED UN CONO LA CUI DIRETTRICE È LA LEMNISCATA BERNOULLIANA.

NOTA

DEL PROF. MATTIA AZZARELLI.

1. S'immagini un cono retto la cui base sia una lemniscata di Bernoulli giacente sul piano XY, e siano:

a il semi-asse della lemniscata

b una porzione dell'altezza del cono compresa tra il vertice ed il piano XY

a_1 il semiasse di una lemniscata qualunque parallela alla data, e su di essa preso un punto qualsivoglia M, le coordinate sue siano :

$$x, y, z.$$

Il vertice del cono venga determinato per le coordinate

$$x = 0, \; y = 0, \; z = -b$$

Per la lemniscata qualunque avremo

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2{}_1(x^2 - y^2);$$

Ora pei triangoli simili, essendo

$$a_1 = \frac{a}{b}(b + z) \;\; ;$$

la equazione particolare del cono sarà

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{a^2}{b^2}(b + z)^2(x^2 - y^2) \, , \qquad (1)$$

la quale è del quart'ordine, come la linea direttrice.

2. L'origine delle coordinate sia pur centro di una sfera di raggio r, e designate per X, Y, Z le coordinate di qualunque suo punto, avremo

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = r^2 .$$

Per la intersecazione di queste due superficie dovranno coesistere le

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{a^2}{b^2}(b + z)^2(x^2 - y^2) \qquad (2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 ; \qquad (3)$$

tra le quali eliminata la x risulta

$$(r^2 - z^2)^2 = \frac{a^2}{b^2}(b + z)^2(r^2 - 2y^2 - z^2)$$

che rappresenta una curva del quart'ordine. Questa equazione si riduce al secondo grado quando si ammetta $b = r$: cioè quando si voglia una sfera che abbia il suo centro sull' asse del cono e passi pel suo vertice. In questa ipotesi troveremo

$$y^2 = -\frac{a^2 + r^2}{2a^2}z^2 + \frac{2r^3}{2a^2}z + \frac{r^2(a^2 - r^2)}{2a^2} \qquad (4)$$

che generalmente rappresenta una ellisse.

Qui vanno distinti tre casi

$$a = r , \quad a > r , \quad a < r.$$

Nel primo l'ellisse proiezione sul piano ZY si muta in un circolo di diametro r, e di equazione

$$y^2 = rz - z^2. \qquad (5)$$

Nel secondo la ellisse ha le sue ascisse limitate da

$$z_1 = r, \; z_2 = - r\left(\frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2}\right).$$

e nel terzo i vertici sono dati dalle ascisse

$$z_1 = r\,, \quad z_2 = r\left(\frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2}\right).$$

Se fra le equazioni (2) (3) si elimina la y ne risulta

$$(r^2 - z^2)^2 = \frac{a^2}{b^2}(b + z)^2(2x^2 + z^2 - r^2)$$

che è pure una equazione del quarto grado. Se ancor qui ammettiamo la ipotesi di $b = r$, risulta una linea del second'ordine data da

$$x^2 = \frac{r^2 - a^2}{2a^2}z^2 - \frac{2r^3}{2a^2}z + \frac{r^2(a^2 + r^2)}{2a^2} \qquad (6)$$

dalla quale impariamo che per $r = a$ questa linea è una parabola di equazione

$$x^2 = r^2 - rz\,; \qquad (7)$$

per $r < a$ una ellisse definita da

$$x^2 = -\frac{a^2 - r^2}{2a^2}z^2 - \frac{2r^3}{2a^2}z + \frac{r^2(a^2 + r^2)}{2a^2}\,;$$

per $r > a$ una iperbole di cui l'equazione è

$$x^2 = \frac{r^2 - a^2}{2a^2}z^2 - \frac{2r^3}{2a^2}z + \frac{r^2(a^2 + r^2)}{2a^2}$$

La proiezione sul piano XY è data generalmente da

$$\frac{b(x^2 + y^2)}{a\sqrt{(x^2 - y^2)}} - b = \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)}$$

la quale nella ipotesi di $b = r$ si muta in

$$(r^2 + a^2)^2 x^4 + (r^2 - a^2)^2 y^4 + 2(r^4 - a^4)x^2y^2 - 4a^2r^2x^2 + 4a^2r^2y^2 = 0\,;$$

e se si ammette che sia $r = a$, essa si riduce semplicemente a

$$y^2 = \frac{x^2}{r^2}(r^2 - x^2)$$

la quale rappresenta una lemniscata che all' origine delle coordinate ed ai vertici ha le tangenti comuni colla lemniscata Bernoulliana, e come essa è quadrabile, giacchè l'area sua trovasi equivalente ai quattro terzi del quadrato del semi-asse.

3. Passiamo ora ad assegnare sulla sfera quella porzione della sua area la quale è limitata dalle trovate proiezioni sui piani ZY, ZX.

E primieramente considerando la proiezione

$$y^2 = rz - z^2$$

e prendendo la x per variabile dipendente, generalmente abbiamo

$$S = \iint dydz \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2\right]} \qquad (8)$$

Ora essendo per la sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{dx}{dz} = -\frac{z}{x},$$

così la (8) si muta in

$$S = \iint dzdy \frac{r}{x}$$

ovvero

$$S = r \iint \frac{dzdy}{\sqrt{(r^2 - z^2 - y^2)}} \qquad (9)$$

Giova qui avvertire essere i limiti della y l' uno $+y$, e l'altro $-y$, e quelli della z essere 0, r, onde

$$S = r \int_0^r dz \int_{-y}^{y} \frac{dy}{\sqrt{(r^2 - z^2 - y^2)}}$$

e quindi

$$S=2r\int_0^r dz\,\text{Arc.sen}\left(=\frac{y}{\sqrt{(r^2-z^2)}}\right) \qquad (10)$$

E perchè la y contenuta in questa espressione è quella che conviene alla linea che limita la superficie dimandata, così la (10) in forza della (5) si muta in

$$S=2r\int_0^r dz\,\text{Arc.sen}\left[=\sqrt{\left(\frac{z}{r+z}\right)}\right]. \qquad (11)$$

La integrazione per parti ci dà

$$\int dz\,\text{Arc.sen}\left[=\sqrt{\left(\frac{z}{r+z}\right)}\right]$$

$$=z\,\text{Arc.sen}\left[=\sqrt{\left(\frac{z}{r+z}\right)}\right]-\frac{\sqrt{r}}{2}\int\frac{dz\sqrt{z}}{r+z}.$$

Fatto $z=u^2$ avremo

$$\frac{\sqrt{r}}{2}\int\frac{dz\sqrt{z}}{r+z}=\sqrt{r}\int\frac{u^2du}{r+u^2}=\sqrt{r}\int\left(du-\frac{rdu}{r+u^2}\right)$$

onde

$$\frac{\sqrt{r}}{2}\int\frac{dz\sqrt{z}}{r+z}=\sqrt{rz}-r\,\text{Arc.tang}\left(=\sqrt{\frac{z}{r}}\right)$$

e quindi

$$\int_0^r dz\,\text{Arc.sen}\left[=\sqrt{\frac{z}{r+z}}\right]=r\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

ed in fine

$$S=\pi r^2-2r^2 \qquad (12)$$

per espressione della superficie dimandata.

Di qui risulta che se dall'emisfero si toglie la superficie trovata, si ottiene la quantità razionale ed algebrica $2r^2$, che da la soluzione del problema fiorentino, proposto dal

Viviani, di aprire in un emisfero quattro finestre in modo che la superficie la quale rimane sia quadrabile.

4. Se la (9) si trasforma in coordinate polari si giunge al medesimo risultato con maggiore speditezza.

Si prenda per polo l'origine delle coordinate: dicasi ρ il raggio vettore che andando al punto di coordinate y, z formi coll'asse delle z un angolo φ, avremo

$$z = \rho\cos\varphi\ , \quad y = \rho\mathrm{sen}\varphi\ .$$

Avvertendo che per tutti i punti dell' area proiettata sul piano ZY e contenuta entro la circonferenza (5) le z, y e ρ, φ sono variabili indipendenti, avremo

$$dy = d\rho\mathrm{sen}\varphi + \rho d\varphi\cos\varphi$$

$$0 = d\rho\cos\varphi - \rho d\varphi\mathrm{sen}\varphi$$

dalle quali eliminato $d\rho$

$$dy = \frac{\rho d\varphi}{\cos\varphi}$$

Ora supposto φ costante abbiamo

$$dz = d\rho\cos\varphi$$

e quindi

$$dzdy = \rho d\rho d\varphi\ .$$

Di più fra le coordinate x, y, z esistendo la relazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

ed essendo al tempo stesso

$$y^2 + z^2 = \rho^2$$

sarà

$$x = \sqrt{(r^2 - \rho^2)}\ .$$

Con tali valori la (9) diverrà

$$S=r\iint\frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{(r^2-\rho^2)}}$$

Pei limiti di ρ, osserveremo che l'area principia quando $\rho=0$, ed è terminata da un contorno che sul piano ZY ha per proiezione la circonferenza

$$y^2=rz-z^2$$

da cui

$$\rho=r\cos\varphi$$

che sarà il valore dell'altro limite: i limiti poi di φ saranno 0, e $\frac{\pi}{2}$, onde

$$S=r\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{r\cos\varphi}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{(r^2-\rho^2)}}$$

e quindi

$$S=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\mathrm{sen}\varphi)\,d\varphi=r^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Se per la determinazione della stessa superficie si volesse far uso della proiezione sul piano ZY, essendo allora

$$S=\iint dxdy\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}$$

si avrebbe

$$S=r\int_0^r dx\int_{-y}^{y}\frac{dy}{\sqrt{(r^2-x^2-y^2)}}$$

da cui

$$S=2r\int_0^r dx\,\mathrm{Arc.sen}\left(=\frac{y}{\sqrt{(r^2-x^2)}}\right);$$

ma

$$y=\frac{x}{r}\sqrt{(r^2-x^2)}$$

dunque

$$S = 2r\int_0^r dx \text{Arc.sen}\left(= \frac{x}{r}\right)$$

dalla quale immediatamente

$$S = \frac{2\pi r^2}{2} - 2r^2$$

5. Supponiamo ora che a sia qualunque rispetto r.

Per la determinazione della corrispondente superficie, avremo, dopo una prima integrazione della (9)

$$S = 2r\int_{z_2}^{z_1} dx \text{Arc.sen}\left[= \sqrt{\left(\frac{r^2(a^2 - r^2) + 2r^3 z - (a^2 + r^2)z^2}{2a^2(r^2 - z^2)}\right)}\right]$$

ma la quantità sotto il radicale riducendosi ad

$$\frac{1}{2}\left[1 - \frac{r^2}{a^2}\left(\frac{r - z}{r + z}\right)\right]$$

sarà

$$S = 2r\int_{z_2}^{z_1} dz \text{Arc.sen}\left[= \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\left[1 - \frac{r^2}{a^2}\left(\frac{r - z}{r + z}\right)\right]}\right]$$

Fatto per comodo

$$\frac{r^2}{a^2}\left(\frac{r - z}{r + z}\right) = u \quad ,$$

ne risulta

$$z = r.\left(\frac{r^2 - a^2 u}{r^2 + a^2 u}\right) .$$

Avvertiremo qui che i limiti della z sono

$$z_1 = r, \quad z_2 = r\left(\frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2}\right) ,$$

e quelli della nuova variabile

$$u_1 = 0 , \quad u_2 = 1 .$$

Intanto essendo indefinitamente

$$S=2r^2\left[\frac{r^2-a^2u}{r^2+a^2u}\text{Arc.sen}\left[=\sqrt{\left(\frac{1-u}{2}\right)}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int\frac{r^2-a^2u}{r^2+a^2u}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}\right]$$

dedurremo

$$S=2r^2\left[\frac{r^2-a^2u}{r^2+a^2u}\text{Arc.sen}\left[=\sqrt{\left(\frac{1-u}{2}\right)}\right]-\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}\right.$$
$$\left.+r^2\int\frac{du}{(a^2u+r^2)\sqrt{(1-u^2)}}\right]$$

Per integrare l'ultimo termine si ponga

$$u=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \text{e}\quad du=-\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}$$

e troveremo

$$\int\frac{du}{(a^2u+r^2)\sqrt{(1-u^2)}}$$
$$=-\frac{2}{\sqrt{(r^4-a^4)}}\text{Arc.tang}\left(=\frac{\sqrt{(r^2-a^2)}\sqrt{(1-u)}}{\sqrt{(r^2+a^2)}\sqrt{(1+u)}}\right),$$

e quindi

$$S=2r^2\left[\frac{r^2-a^2u}{r^2+a^2u}\text{Arc.sen}\left[=\sqrt{\left(\frac{1-u}{2}\right)}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\text{Arc.sen}(=u)-\frac{2r^2}{\sqrt{(r^4-a^4)}}\text{Arc.tang}\left(=\frac{\sqrt{(r^2-a^2)}\sqrt{(1-u)}}{\sqrt{(r^2+a^2)}\sqrt{(1+u)}}\right)\right].$$

Preso questo integrale fra gli stabiliti limiti avremo per l'area cercata

$$S=2r^2\left[\frac{\pi}{2}-\frac{2r^2}{\sqrt{(r^4-a^4)}}\text{Arc.tang}\left(=\frac{\sqrt{(r^2-a^2)}}{\sqrt{(r^2+a^2)}}\right)\right] \quad (13)$$

6. Se nella (13) poniamo

$$r=a$$

troviamo

$$S=2r^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{0}{0}\right);$$

ma fatto per comodo

$$A=\frac{2r^2}{\sqrt{(r^4-a^4)}}\text{ Arc. tang}\left[=\frac{\sqrt{(r^2-a^2)}}{\sqrt{(r^2+a^2)}}\right]$$

$$m=\frac{2r^2}{\sqrt{(r^2+a^2)}\sqrt{(r+a)}},\quad n=\frac{\sqrt{(r^2+a)}}{\sqrt{(r^2+a^2)}}$$

sarà

$$A=\frac{m\text{Arc.tang}[=n\sqrt{(r-a)}]}{\sqrt{r-a}}=\frac{mn}{1+n^2(r-a)}$$

ovvero

$$A=\frac{2r^2\sqrt{(r+a)}}{[\sqrt{(r^2+a^2)}]^2\sqrt{(r+a)}[1+n^2(r-a)]},$$

ove per $r=a$ risulta

$$A=1$$

e quindi

$$S=2r^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)..$$

7. Se nella (13) poniamo $a>r$, essa presentasi sotto forma immaginaria, cioè

$$S=2r^2\left[\frac{\pi}{2}-\frac{2r^2}{\sqrt{(r^2+a^2)}\sqrt{(a^2-r^2)}\sqrt{(-1)}}\right.$$

$$\left.\times\text{ Arc. tang}\left(=\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{\sqrt{(a^2+r^2)}}\sqrt{(-1)}\right)\right];$$

ma posto

$$s'=\pi r^2-S,\ \frac{1}{m}=\frac{4r^4}{\sqrt{(a^2+r^2)}\sqrt{(a^2-r^2)}},\quad n=\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{\sqrt{(a^2+r^2)}}$$

avremo

$$ms'\sqrt{(-1)} = \text{Arc.tang}(=n\sqrt{(-1)})$$

da cui

$$-n\sqrt{(-1)} = \text{tang}\, ms'\sqrt{(-1)}.$$

E perchè

$$\text{tang}\lambda = \frac{e^{2\lambda\sqrt{-1}}-1}{\sqrt{(-1)}e^{2\lambda\sqrt{-1}}+1}:$$

così fatto

$$\lambda = ms'\sqrt{(-1)}$$

risulta

$$\text{tang}\, ms'\sqrt{(-1)} = \frac{1-e^{2ms'}}{\sqrt{(-1)}(1+e^{2ms'})}$$

e quindi

$$-n = \frac{1-e^{2ms'}}{1+e^{2ms'}}$$

dalla quale facilmente ne deriva

$$s' = \frac{1}{2m}\log\left(\frac{1+n}{1-n}\right)$$

ed in fine

$$S = \pi r^2 - \frac{1}{2m}\log\left(\frac{1+n}{1-n}\right), \qquad (14)$$

per l'espressione dell'area cercata.

8. Se qui poniamo

$$a = r$$

deve risultare la (12): ma essendo simultaneamente

$$m = 0\,,\quad n = 0$$

avremo

$$S = \pi r^2 - \frac{0}{0}$$

A togliere la indeterminazione si faccia

$$m = \alpha t\,,\ n = \beta t$$

ove

$$\alpha=\frac{\sqrt{(a^2+r^2)}\sqrt{(a+r)}}{4r^2},\ \beta=\frac{\sqrt{(a+r)}}{\sqrt{(a^2+r^2)}},\ t=\sqrt{(a-b)},$$

e cogli ordinari metodi troveremo

$$S=\pi r^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta(1-\beta t)+\beta(1+\beta t)}{\alpha(1-\beta^2 t^2)}\right)$$

e quindi per $t=0$

$$S=\pi r^2-2r^2$$

9. Per determinare la espressione del volume del cono terminato dal segmento di superficie sferica compresa fra la intersecazione del cono e della sfera, principieremo coll'assegnarne la espressione elementare. Questo volume infinitesimo ha per base

$$dy\,dz\sqrt{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2\right]}.$$

Se però dai quattro suoi vertici immaginiamo condotte quattro rette al vertice del cono, otterremo una piramide; e poichè la sua base giace sul piano tangente la sfera nel punto di coordinate x, y, z, così l'altezza di essa piramide è la lunghezza della perpendicolare ad esso piano calata dal vertice del cono, ossia dal punto

$$x=0,\ y=0,\ z=-r.$$

Dopo ciò rappresentando per X, Y, Z le coordinate variabili del piano tangente la sfera, avremo

$$Xx+Yy+Zz-r^2=0$$

ovvero

$$X.\frac{x}{z}+Y.\frac{y}{z}+Z-\frac{r^2}{z}=0.$$

Essendo generalmente

$$P = -\frac{D + ax' + by' + z'}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}$$

la lunghezza della perpendicolare ad un piano

$$ax + by + z + D = 0$$

che parte dal punto x', y', z', sarà nel caso nostro

$$P = -\frac{-r - \frac{r^2}{z}}{\sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}\right)}} = z + r,$$

e perciò la espressione elementare del particolare volume sarà

$$d^2 V = \left(\frac{r+z}{3}\right) dydz. \frac{r}{\sqrt{(r^2 - z^2 - y^2)}}. \quad (15)$$

10. Supporremo primamente che sia $a=r$, e così avremo

$$V = \frac{r}{3}\int_0^r (r + z)\, dz \int_{-y}^{y} \frac{dy}{\sqrt{(r^2 - z^2 - y^2)}}$$

da cui

$$V = \frac{2r}{3}\int_0^r (r+z)\, dz \,\text{Arc.sen}\left(= \frac{y}{\sqrt{(r^2 - z^2)}}\right). \quad (16)$$

I valori della y che appartengono alla linea la quale limita sulla sfera il volume, sono contenuti dalla relazione

$$y^2 = rz - z^2$$

onde

$$V = \frac{2r}{3}\int_0^r \left(r + z\right) dz \text{Arc.sen}\left[= \sqrt{\left(\frac{z}{r+z}\right)}\right]$$

ed ancora

$$V = \frac{2r}{3}\left[r\int_0^r dz \text{ Arc.sen}\left(= \sqrt{\frac{z}{r+z}}\right)\right.$$

$$\left. + \int_0^r zdz \text{ Arc.sen}\left(= \sqrt{\frac{z}{r+z}}\right)\right]$$

Il primo termine ci dà

$$\int_0^r rdz \,\text{Arc. sen}\left(=\sqrt{\frac{z}{r+z}}\right)=\frac{\pi r^2}{2}-r^2$$

e l'altro é

$$\int_0^r zdz \,\text{Arc. sen}\left(=\sqrt{\frac{z}{r+z}}\right)=\frac{r^2}{3}$$

e quindi

$$\text{V}=\frac{2\pi r^3}{2.3}-\frac{4r^3}{9}$$

il quale duplicato, abbiamo pel valore di tutto il cono

$$2\text{V}=\frac{4\pi r^3}{2.3}-\frac{8r^3}{9}. \quad (17).$$

Da questa impariamo che la differenza fra il volume dell'emisfero e quello del particolare cono è una quantità razionale.

11. Se nella (15) s'introducono le coordinate polari, essa si muta pel caso attuale in

$$\text{V}=\frac{r^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{r\cos\varphi}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{(r^2-\rho^2)}}+\frac{r}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\cos\varphi\int_0^{r\cos\varphi}\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{(r^2-\rho^2)}}.$$

Ora per quanto abbiamo esposto al § (4) é

$$\frac{r^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{r\cos\varphi}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{(r^2-\rho^2)}}=\frac{\pi r^3}{2.3}-\frac{r^3}{3}.$$

Pel secondo termine osserveremo essere

$$\int_0^{r\cos\varphi}\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{(r^2-\rho^2)}}=\frac{r^2}{2}\,[-\text{sen}\varphi\cos\varphi+\text{Arc.sen}(=\cos\varphi)];$$

ma l'arco che ha per seno il coseno dell'arco φ è comple-

mento di φ, onde

$$\text{Arc. sen}(=\cos\varphi)=\frac{\pi}{2}-\varphi$$

e perciò

$$\frac{r^3}{2.3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\cos\varphi\left(-\text{sen}\varphi\cos\varphi+\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{r^3}{9}.$$

Ora sostituendo sarà

$$V=\frac{\pi r^3}{2.3}-\frac{2r^3}{9},$$

che rappresenta la quarta parte del volume totale.

La determinazione dello stesso volume riescirebbe semplicissima quando si adoperasse la formola

$$d^2V=\left(\frac{r+z}{3}\right)dxdy.\frac{r}{3}$$

la quale condurrebbe a

$$V=\frac{2r^2}{3}\int_0^r dx\text{Arc.sen}\left(=\frac{y}{\sqrt{(r^2-x^2)}}\right)+\frac{2r}{3}\int ydx,$$

che per la proiezione sul piano XY si muta in

$$V=\frac{2r^2}{3}\int_0^r dx\text{Arc.sen}\left(=\frac{x}{r}\right)+\frac{2r}{3}\int\frac{xdx}{r}\sqrt{(r^2-x^2)}$$

e quindi

$$V=\frac{2\pi r^3}{2.3}-\frac{4r^3}{9}.$$

12. Passeremo ora ad assegnare il volume nella ipotesi che la r sia qualunque rispetto a.

Ripresa la (16) si ponga in essa per y il valore dato dalla (4) e si otterrà

$$V = \frac{2r}{3}\int_{z_1}^{z_2} (r+z)dz \text{Arc.sen}\left[=\sqrt{\left(\frac{1-u}{2}\right)}\right] \quad ;$$

ritenendo

$$u = \frac{r^2}{a^2}\left(\frac{r-z}{r+z}\right)$$

Di qui per espressione indefinita

$$\left.\begin{aligned} V = &\frac{2r^2}{3}\int dz \text{ Arc. sen}\left[=\sqrt{\left(\frac{1-u}{2}\right)}\right] \\ &+\frac{r^3}{3}\left(\frac{r^2-a^2u}{r^2+a^2u}\right)^2 \text{Arc. sen}\left[=\sqrt{\left(\frac{1-u}{2}\right)}\right] \\ &+\frac{r^3}{6}\int\left(\frac{r^2-a^2u}{r^2+a^2u}\right)^2 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} \end{aligned}\right\} (18)$$

Designando questi termini ordinatamente per

$$(A)\,,\quad (B)\,,\quad (C)\,,$$

sarà

$$V = (A) + (B) + (C)\,.$$

Per integrare l'ultimo termine porremo la parte razionale sotto la seguente forma

$$\frac{4r^4 - 4r^2(r^2+a^2u) + (r^2+a^2u)^2}{(r^2+a^2u)^2}$$

e quindi

$$C = \frac{r^3}{6}\left[\, 4r^4\,(\text{I}) - 4r^2\,(\text{II}) + (\text{III})\,\right] \qquad (19)$$

fatto per comodo

$$(\text{I}) = \int\frac{du}{(r^2+a^2u)^2\sqrt{(1-u^2)}}\,,\quad (\text{II}) = \int\frac{du}{(r^2+a^2u)\sqrt{(1-u^2)}}$$

$$(\mathrm{III}) = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} \cdot$$

Ora se poniamo qui come al §. 5.

$$u = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad du = -\frac{4tdt}{(1+t^2)^2},\quad \sqrt{(1-u)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

avremo pel primo termine

$$(\mathrm{I}) \qquad = -\frac{2}{(r^2+a^2)^2}\int \frac{(1+t^2)dt}{(1+m^2t^2)^2}$$

ove

$$m^2 = \frac{r^2-a^2}{r^2+a^2}$$

e quindi

$$(\mathrm{I}) = -\frac{2}{m(r^2+a^2)^2}\int \frac{mdt}{(1+m^2t^2)^2} - \frac{2}{m^3(r^2+a^2)^2}\int \frac{m^2t^2.mdt}{(1+m^2t^2)^2}$$

$$= -\frac{2}{m(r^2+a^2)^2}\int \frac{dv}{(1+v^2)^2} - \frac{2}{m^3(r^2+a^2)^2}\int \frac{v^2dv}{(1+v^2)^2} \cdot$$

E perchè

$$\int \frac{dv}{(1+v^2)^2} = \mathrm{Arc.tang}(=v) - \int \frac{v^2dv}{(1+v^2)^2},$$

sarà

$$(\mathrm{I}) = -\frac{2}{m(r^2+a^2)^2}\,\mathrm{Arc.\,tang}(=v) + \frac{2(m^2-1)}{m^3(r^2+a^2)^2}\int \frac{v^2dv}{(1+v^2)^2}$$

da cui, dopo l'integrazione e riduzione

$$(\mathrm{I}) = -\frac{m^2+1}{m^3(r^2+a^2)^2}\,\mathrm{Arc.tang}(=mt) - \frac{(m^2-1)t}{m^2(r^2+a^2)^2(1+m^2t^2)} \cdot$$

Ritenendo le medesime notazioni troveremo

$$(\mathrm{II}) = -\frac{2}{m(r^2+a^2)}\,\mathrm{Arc.tang}(=mt)$$

e

$$(III) = \text{Arc.sen}\left(=\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$$

Per la (19) avremo

$$(C) = \frac{r^3}{3}\left[-\frac{4r^4(m^2+1)}{m^3(r^2+a)^2}\text{Arc.tang}(=mt) - \frac{4r^4(m^2-1)t}{m^2(r^2+a^2)^2(1+m^2t^2)}\right.$$

$$\left. + \frac{8r^2}{m(r^2+a^2)}\text{Arc.tang}(=mt) + \text{Arc.sen}\left(=\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\right]$$

la quale ci da

$$(C) = \frac{r^3}{6}\left[\frac{8a^2m^2r^2+4m^2r^4-4r^4}{m^3(r^2+a^2)^2}\text{Arc. tang}(=mt)\right.$$

$$\left. - \frac{4r^4(m^2-1)t}{m^2(r^2+a^2)^2(1+m^2t^2)} + \text{Arc. sen}\left(=\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\right]$$

Per l'integrale definito di questa espressione avvertiremo che ai limiti di z

$$z_1 = r\left(\frac{r^2-a^2}{r^2+a^2}\right) \quad z_2 = r$$

corrispondono per la u

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 0,$$

e per la particolare relazione fra u e t abbiamo

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 1$$

onde

$$(C)' = \frac{r^3}{6}\left[\frac{8a^2m^2r^2+4m^2r^4-4r^4}{m^3(r^2+a^2)^2}\text{Arc.tang}(=m)\right.$$

$$\left. - \frac{4r^4(m^2-1)}{m^2(r^2+a^2)^2(m^2+1)} - \frac{\pi}{2}\right].$$

Essendo

$$(B) \quad = \frac{r^3}{3}\left[\frac{r^2(1+t^2)-a^2(1-t^2)}{r^2(1+t^2)+a^2(1-t^2)}\right]\text{Arc.sen}\left[=\sqrt{\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)}\right]$$

avremo per l'integrale definito

$$(B)' \quad = \frac{\pi}{4}\frac{r^3}{3}$$

e così pure troveremo

$$(A)' \quad = \frac{2\pi r^3}{2.3} - \frac{4r^5m^2(r^2+a^2)}{3m^3(r^2+a^2)^2}\text{ Arc.tang}(=m).$$

Dopo ciò addizionando e riducendo i trovati valori avremo

$$\left.\begin{aligned} V = \frac{2\pi r^3}{2.3} - \frac{2r^7(m^2+1)}{3m^3(r^2+a^2)^2}\text{ Arc.tang}(=m) \\ - \frac{2r^7(m^2-1)}{3m^2(r^2+a^2)^2(m^2+1)} \end{aligned}\right\} (20)$$

ovvero

$$V = \frac{2\pi r^3}{2.3} - \frac{2r^7}{3(r^2+a^2)^2}\left[\frac{(m^2+1)^2\text{Arc.tang}(=m)+m(m^2-1)}{m^3(m^2+1)}\right] (21)$$

12. Se nella (21) facciamo l'ipotesi $r=a$, essendo allora $m=0$, la quantità entro parentesi si presenta sotto la forma indeterminata di $\frac{0}{0}$. Però essendo

$$\text{Arc.tang}(=m)=m-\frac{m^3}{3}+\text{ecc.}$$

essa quantità si muta facilmente in

$$\frac{m^2+2-\frac{1}{3}(m^2+1)^2+1}{m^2+1}$$

da cui, fatto $m = 0$, deduciamo $\frac{8}{3}$ per suo valore particolare, onde sostituendo nella (21), avvertendo essere $r = a$, risulta

$$V = \frac{2\pi r^3}{2.3} - \frac{4r^3}{9}$$

la quale duplicata coincide colla (17).

13. Se nella (20) supponiamo $r < a$ essa mutasi in

$$V = \frac{2\pi r^3}{2.3} + \frac{2r^7(1-m^2)}{3m^3(r^2+a^2)^2\sqrt{-1}} \text{Arc.tang}(=m\sqrt{-1})$$
$$- \frac{2r^7(m^2+1)}{3m^2(r^2+a^2)^2(1-m^2)}.$$

Se qui facciamo

$$\frac{2r^7(1-m^2)}{3m^3(r^2+a^2)^2} = \frac{1}{n}$$

e rappresentiamo per δ il termine immaginario, ripetendo il ragionamento del § 7 otterremo

$$e^{2n\delta} = \frac{1-m}{1+m}$$

da cui

$$\delta = \frac{1}{2n} \log\left(\frac{1-m}{1+m}\right)$$

ovvero

$$\delta = \frac{r^7(1-m^2)}{3m^3(r^2+a^2)^2} \log\left(\frac{1-m}{1+m}\right)$$

e quindi

$$V = \frac{2\pi r^3}{2.3} + \frac{r^7(1-m^2)}{3m^3(r^2+a^2)^2} \log\left(\frac{1-m}{1+m}\right) - \frac{2r^7(m^2+1)}{3m^2(r^2+a^2)^2(1-m^2)}.$$

14. Passiamo ora ad assegnare l'arco della linea intersecazione della sfera col cono fin qui considerato.

Si prenda a questo fine la proiezione di essa linea sul piano XY e si ponga sotto la forma

$$\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{r^2}=1,$$

dalla quale apprendiamo potersi verificare dalle coordinate circolari

$$x=r\cos\varphi,\ \ y=r\text{sen}\varphi\cos\varphi. \qquad (22)$$

Per la sfera essendo

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

e per l'arco qualunque

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

avremo

$$ds^2=\frac{dx^2(r^2-y^2)+dy^2(r^2-x^2)+2xydxdy}{r^2-x^2-y^2} \qquad (23)$$

perchè dovendosi le curva trovare sulla sfera, per questa è

$$dz=-\frac{xdx+ydy}{\sqrt{(r^2-x^2-y^2)}}.$$

Ora per le (22)

$$dx=-rd\varphi\text{sen}\varphi,\ dy=rd\varphi\cos2\varphi$$

dalla sostituzione dei quali valori risulta dopo alcune riduzioni

$$ds=rd\varphi\sqrt{(1+\text{sen}^2\varphi)}.$$

Fatto qui

$$\varphi=\frac{\pi}{2}-\omega$$

si trova

$$ds = -r\sqrt{2}\, d\omega \sqrt{(1 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\omega)}.$$

Per integrare questa espressione avvertiremo che ai limiti

$$\varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

corrispondono

$$\omega = \frac{\pi}{2},\ \omega = 0$$

e perciò sarà

$$s = r\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \sqrt{(1 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\omega)}\,,$$

ed usando la notazione di Legendre

$$s = r\sqrt{2}\,\mathrm{E}\,(\tfrac{1}{2}) \qquad (24).$$

Quindi il quadrante della curva, intersecazione della sfera col cono la cui direttrice è la lemniscata di Bernoulli equivale al quadrante di una ellisse di semi-asse maggiore $a = r\sqrt{2}$, e semi-asse minore quello che risulta da

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \tfrac{1}{2},\ \text{da cui}\ b = r.$$

15. Per calcolare l'arco della curva

$$y^2 = \frac{x^2}{r^2}(r^2 - x^2)$$

faremo uso delle coordinate circolari (22) e dopo facili riduzioni troveremo

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2\,(1 - 3\,\mathrm{sen}^2\varphi + 4\,\mathrm{sen}^4\varphi) \quad (25)$$

la quale si riduce a dipendere da funzioni ellittiche Si ponga

$$\tang\varphi = m \tang\frac{\omega}{2},$$

di qui

$$\sen^2\varphi = \frac{m^2\sen^2\frac{\omega}{2}}{1+(m^2-1)\sen^2\frac{\omega}{2}}, \cos\varphi = \frac{1-\cos^2\frac{\omega}{2}}{1+(m^2-1)\sen^2\frac{\omega}{2}}$$

$$d\varphi = \frac{md\omega}{2\left(1+(m^2-1)\sen^2\frac{\omega}{2}\right)}$$

e perchè

$$\sen^2\frac{\omega}{2} = \frac{1-\cos\omega}{2}, \cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{1+\cos\omega}{2}$$

avremo ancora

$$\sen^2\varphi = \frac{m^2(1-\cos\omega)}{m^2+1-(m^2-1)\cos\omega}$$

$$d\varphi = \frac{md\omega}{m^2+1-(m^2-1)\cos\omega}$$

i quali valori sostituiti nella (25) abbiamo

$$ds^2 = \frac{m^2r^2d\omega^2}{[m^2+1-(m^2-1)\cos\omega]^2}\left[1-\frac{3m^2(1-\cos\omega)}{m^2+1-(m^2-1)\cos\omega}\right.$$

$$\left.+\frac{4m^4(1-\cos\omega)^2}{(m^2+1-(m^2-1)\cos\omega)^2}\right];$$

Fatti qui gli opportuni sviluppi, ed introdotta la condizione

$$-2(m^4-1)+3m^2(m^2+1)+3m^2(m^2-1)-8m^4=0 \quad (26)$$

risulta

$$ds^2 = \frac{m^2 r^2 d\omega^2}{[m^2+1-(m^2-1)\cos\omega]^4}[(m^2+1)^2-3m^2(m^2+1)$$

$$+4m^4+(m^2-1)^2-3m^2(m^2-1)+4m^4)\cos^2\omega].$$

Dalla (26) ricavandosi

$$m^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

troveremo facilmente

$$ds = \frac{2mr}{(m^2+1)^2}\int\frac{d\omega}{(1+k\cos\omega)^2}\sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\omega)} \qquad (27)$$

ove

$$k = \frac{m^2-1}{m^2+1},\ c^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

La integrazione della (27) dipende dai trascendenti ellittici di prima, seconda, e terza specie, come in Legendre « Traité des Fonctions Elliptiques. Tome I. pag. 329. »

SOPRA UNA FORMOLA DI LAGRANGE SPETTANTE AL MOTO DEI LIQUIDI NE' VASI.

MEMORIA

DEL PROF. ANGELO GENOCCHI.

1. Nel tomo III, pag. 212, delle *Miscellanea taurinensia*, proposto il caso d' un fluido omogeneo e non elastico che si mova in un vaso di qualsivoglia figura, Lagrange cerca una serie libera da immaginarj e da coefficienti differenziali che serva a determinare la velocità d' una molecola del fluido riferita a due coordinate rettangole t, x, quando il moto è giunto ad uno stato permanente. Chiamate p, q le velocità della molecola parallele ai due assi, trova

$$\frac{dp}{dt}+\frac{dq}{dx}=0\,,\ \frac{dp}{dx}-\frac{dq}{dt}=0\,,$$

onde

$$\frac{d^2p}{dt^2}+\frac{d^2p}{dx^2}=0\,,$$

e integrando con due funzioni arbitrarie φ e ψ ne deduce

$$(1)\left\{\begin{aligned} p&=\varphi\,(t+x\sqrt{-1})+\psi\,(t-x\sqrt{-1})\,,\\ \frac{q}{\sqrt{-1}}&=\varphi\,(t+x\sqrt{-1})-\psi\,(t-x\sqrt{-1})\,,\end{aligned}\right.$$

talchè si tratta di ridurre una espressione come

$$\varphi\,(t\pm x\sqrt{-1})$$

alla forma $P \pm Q\sqrt{-1}$, ove P e Q siano quantità reali. Si faccia

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi(t+x\sqrt{-1})+\varphi(t-x\sqrt{-1})}{2} = F(x), \\ \dfrac{\varphi(t+x)+\varphi(t-x)}{2} = f(x), \end{cases}$$

$$(3)\qquad F(x) = \alpha f(0) + \alpha' f(x) + \alpha'' f(2x) + \alpha''' f(3x) + \ldots,$$

intendendo che α, α', α'', ... siano quantità costanti da determinarsi. Lagrange ottiene (*l.c.p.*216) con una costante a arbitraria

$$(4)\qquad \alpha^{(m)} = (-1)^{m+1} \cdot \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi} \cdot \frac{m^2(1-a)-a}{m^2+1}$$

e riduce a all' unità perchè la serie (3) sia quanto più è possibile convergente.

Di questa formola il Barone Plana tentò una nuova dimostrazione nel tomo XVI delle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino (2ª. serie, 1857). La esamineremo più innanzi.

L'equazione (3) determina P: Lagrange ne trae Q differenziandola rispetto ad x e integrandola poi rispetto a t.

2. Le formole (3) e (4) parvero elegantissime al Dalembert (loc. cit. pag. 391), il quale aggiunse d'aver trovata un'altra espressione di F (x) che si compone d'un numero finito di termini ogni qualvolta $\varphi(x)$ sia una funzione intera. Questa in sostanza è ordinata per le differenze successive $\Delta^m\varphi(x)$, prese con $\Delta x = y$ costante, e si ottiene svolgendo

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) - \varphi(x), \text{ e } \Delta\varphi(x),\ \Delta^2\varphi(x),\ \Delta^3\varphi(x), \ldots$$

per le potenze ascendenti di y, moltiplicando per 1, r, r', r'',... l'equazioni così formate, sommando i prodotti e po-

nendo nulli i coefficienti delle varie potenze di y. Tuttavia il Dalembert credeva tutti questi metodi più curiosi che utili perchè le formole originarie contengono i differenziali $d^n\varphi(x)$ e se $\varphi(x)$ è una funzione discontinua questi differenziali presenteranno qualche cambiamento repentino di valore o *salto* che renderà fallaci le espressioni ottenute (ivi pag. 393).

Ma egli non s'avvide che il suo metodo deve condurre alla medesima espressione che si trarrebbe dalla formola Newtoniana d'interpolazione

$$f(x+k)=f(x)+\frac{k}{h}\Delta f(x)+\frac{k(k-h)}{1.2h^2}\Delta^2 f(x)+\text{ec.}$$

prendendo $h=y$, $k=y\sqrt{-1}$. Ora questa formola si dimostra senza passare per alcun differenziale, e anzi si rende identica aggiungendo al secondo membro dopo $m+1$ termini il termine completivo

$$\sum\nolimits_0^k \frac{(k-h-z)(k-2h-z)\ldots(k-mh-z)}{1.2\ldots mh^m}\Delta^{m+1}f(x+z)$$

ove l'integrazione si riferisce alla variabile z presa con la differenza $\Delta z=h$. Cade adunque l'obbiezione desunta dalla temuta discontinuità dei $d^n f(x)$.

3. Come l' espressione di Dalembert è una conseguenza immediata della formola d'interpolazione data da Newton, così l' espressione trovata da Lagrange si deduce in modo semplicissimo dalla formola d' interpolazione che lo stesso Lagrange propose, e che si esprime con $u_x=\Sigma X_m u_m$, intendendo che u_m corrisponda ad $x=x_m$ e che X_m sia il prodotto di tutte le frazioni $\frac{x-x_n}{x_m-x_n}$ formate col prendere n diverso da m. Si faccia $x=z\sqrt{-1}$, e ad x_m si assegnino gl'infiniti valori $\pm z$, $\pm 2z$, $\pm 3z$, $\pm 4z$, ... : si avrà

$$X_m = \Pi \frac{1-\frac{x}{x_n}}{1-\frac{x_m}{x_n}} = \frac{\Pi\left(1-\frac{z\sqrt{-1}}{x_n}\right)}{\Pi\left(1-\frac{x_m}{x_n}\right)};$$

ma $\Pi\left(1-\frac{x}{x_n}\right)$ steso a tutti i valori $x_n = \pm z, \pm 2z, \pm 3z, \ldots$ in infinito equivale a

$$\Pi\left(1-\frac{x^2}{n^2 z^2}\right) = \frac{z}{\pi x} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{z},$$

e parimente

$$\Pi\left(1-\frac{z\sqrt{-1}}{x_n}\right) = \Pi\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi},$$

onde X_m sarà il valore di

$$\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} \frac{1}{1-\frac{z\sqrt{-1}}{x_m}} \cdot \frac{1-\frac{x}{x_m}}{\frac{z}{\pi x} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{z}}$$

corrispondente ad $x = x_m$, cioè

$$-\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} \frac{1}{\cos\frac{\pi x_m}{z}} \frac{x_m}{x_m - z\sqrt{-1}}$$

$$= -\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}(-1)^m \cdot \frac{m}{m \pm \sqrt{-1}},$$

posto $x_m = \mp mz$. Prendendo $u_x = f(x)$, e riunendo i due termini che risultano dai due valori opposti di x_m avremo

$$f(z\sqrt{-1}) =$$

$$-\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} \sum (-1)^m f(mz)\left(\frac{m}{m+\sqrt{-1}} + \frac{m}{m-\sqrt{-1}}\right),$$

ossia

$$(5)\qquad F(z) = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\sum(-1)^{m+1}.\ \frac{m^2 f(mz)}{m^2+1},$$

che equivale alle formole (3) e (4) nel caso di $a=0$. Prendendo invece

$$u_x = \mathrm{f}(x) = \frac{\varphi(t+x)-\varphi(t-x)}{2},$$

si troverà

$$\mathrm{f}(z\sqrt{-1}) =$$

$$-\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum(-1)^m\ \mathrm{f}(mz)\left(\frac{m}{m-\sqrt{-1}}-\frac{m}{m+\sqrt{-1}}\right)$$

$$= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\sqrt{-1}\sum(-1)^{m+1}\frac{\mathrm{f}(mz)}{m^2+1};$$

integrando rispetto a z i termini di questa moltiplicati per dz, e differenziandoli poi rispetto a t, si otterrà

$$f(z\sqrt{-1}) = -\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\sum(-1)^{m+1}\frac{f(mz)}{m^2+1}+\mathrm{T},$$

dove T rappresenta una funzione arbitraria di t. Supposto $z=0$ risulterà

$$\mathrm{T} = f(0)+\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}f(0)\sum\frac{(-1)^{m+1}}{m^2+1} = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}f(0),$$

poichè

$$\frac{\pi}{e^{\pi}-e^{-\pi}} = \tfrac{1}{2}+\sum\frac{(-1)^m}{m^2+1}.$$

Dunque

$$(6)\qquad F(z) = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left[\frac{f(0)}{2}+\sum\frac{(-1)^m f(mz)}{m^2+1}\right],$$

che equivale alle formole (3) e (4) nel caso di $a = 1$. Aggiungendo l'equazione (6) moltiplicata per a alla (5) moltiplicata per $1 - a$, si formerà una terza equazione che riprodurrà le formole (3) e (4) nella loro generalità.

4. Ma non intendo presentare come una vera dimostrazione quest' applicazione della formola d' interpolazione lagrangiana. Per la dimostrazione esatta ricorreremo ad un teorema del Cauchy (*Mémoires des savans étrangers*, 1827, pag. 283) giusta il quale se la funzione $\frac{\theta(x+y\sqrt{-1})}{\omega(x+y\sqrt{-1})}$ non varia a sbalzi tra i limiti

$$x = x_0, \quad x = X, \quad \text{e} \quad y = y_0, \quad y = Y,$$

e se chiaminsi x_1, x_2, ... x_m le radici dell'equazione $\frac{\theta(x)}{\omega(x)} = \pm \infty$ aventi la parte reale compresa tra x_0 ed X, il coefficiente di $\sqrt{-1}$ tra y_0 ed Y, supposto che queste radici appartengano tutte all'equazione $\omega(x) = 0$, e fatto $\omega'(x) = \frac{d\omega(x)}{dx}$, si avrà

$$(7) \left\{ \begin{aligned} & 2\pi\sqrt{-1} \sum_{i=m}^{i=m} \frac{\theta(x_i)}{\omega'(x_i)} \\ & = \sqrt{-1} \int_{y_0}^{Y} \left(\frac{\theta(X+y\sqrt{-1})}{\omega(X+y\sqrt{-1})} - \frac{\theta(x_0+y\sqrt{-1})}{\omega(x_0+y\sqrt{-1})} \right) dy \\ & - \int_{x_0}^{X} \left(\frac{\theta(x+Y\sqrt{-1})}{\omega(x+Y\sqrt{-1})} - \frac{\theta(x+y_0\sqrt{-1})}{\omega(x+y_0\sqrt{-1})} \right) dx, \end{aligned} \right.$$

ove l'integrale relativo ad x si deve ridurre al suo valor principale ed a $\frac{\theta(x_i)}{\omega(x_i)}$ si deve sostituire la sua metà quando

in x_i la parte reale eguaglia x_0 od X, ovvero il coefficiente di $\sqrt{-1}$ eguaglia y_0 od Y.

Si prenda

$$x_0 = -X, \quad y_0 = 0, \quad X > 1, \quad Y > 1,$$

e
$$\omega(x) = (1 + x^2)\text{sen}\pi x,$$

onde

$$\omega'(x) = 2x\text{sen}\pi x + \pi(1 + x^2)\cos\pi x,$$

e si chiami n il massimo numero intero minore di X. Avremo

$$m = n+2, \quad x_1 = \sqrt{-1}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2,$$

$$\ldots \; x_{n+2} = n, \quad x_{n+2+i} = -x_{i+2},$$

e ad un tempo

$$\omega'(x_1) = 2\sqrt{-1}\text{sen}(\pi\sqrt{-1}) = -(e^{\pi} - e^{-\pi}),$$

$$\omega'(x_2) = \pi, \quad \omega'(\mp x_{i+2}) = \pi(1 + i^2)\cos\pi i$$

se $0 < i < n+1$: quindi il primo membro dell'equazione (7) diviso per $2\sqrt{-1}$ diverrà

$$-\frac{\pi\theta(\sqrt{-1})}{e^{\pi} - e^{-\pi}} + \frac{1}{2}\theta(0) + \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\theta(i)\cos\pi i}{1 + i^2},$$

talchè supposto $\theta(x) = [a - (1-a)x^2]f(xu)$, il secondo membro della stessa equazione (7) esprimerà il resto della serie (3) dopo $n+1$ termini. Affinchè la serie sia convergente e però esatta la formola (3), converrà che quel secondo membro divenga infinitesimo per $X = \infty$ e $n = \infty$.

Quando la frazione $\dfrac{\theta(x+y\sqrt{-1})}{\omega(x+y\sqrt{-1})}$ si annulla per $x = \pm\infty$ qualunque sia il valore di y tra 0 e ∞, e per $y = \infty$ qualunque sia x, allora preso

$$x_0 = -\infty, \quad X = \infty, \quad y_0 = 0, \quad Y = \infty,$$

la formola (7) somministra (Cauchy, *loc. cit.*, pag. 283)

$$(8) \qquad 2\pi\sqrt{-1}\sum\frac{\theta(x_i)}{\omega'(x_i)}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta(x)}{\omega(x)}\,dx \quad :$$

ma per le precedenti espressioni di $\omega(x)$ e $\theta(x)$ si ha

$$\theta(-x)=\theta(x)\,, \quad \omega(-x)=-\omega(x)$$

e quindi $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta(x)}{\omega(x)}dx=0$; dunque adempiendosi le condizioni testè spiegate, la formola di Lagrange che si deduce dal primo membro della (8) eguagliato a zero sarà pienamente esatta.

Sia per esempio

$$\varphi(x)=\text{sen}x\,, \quad a=1\,,$$

e quindi $\qquad \theta(x)=f(xu)=\text{sen}t\cos xu,$

$$\frac{\theta(x+y\sqrt{-1})}{\omega(x+y\sqrt{-1})}=\frac{\text{sen}t\cos(x+y\sqrt{-1})u}{[1+(x+y\sqrt{-1})^2]\text{sen}(x+y\sqrt{-1})\pi}$$

$$=\frac{\text{sen}t.\sqrt{-1}}{1+(x+y\sqrt{-1})^2}\;\frac{(e^{-y}e^{x\sqrt{-1}})^{\pi+u}+(e^{-y}e^{x\sqrt{-1}})^{\pi-u}}{e^{2\pi x\sqrt{-1}}e^{-2\pi y}-1}\,,$$

prodotto di due fattori di cui ciascuno sarà nullo per $y=\infty$ se u sarà compreso tra π e $-\pi$. Il primo fattore si annulla eziandio per $x=\pm\infty$; quanto al secondo cioè

$$\frac{\cos(x+y\sqrt{-1})u}{\text{sen}(x+y\sqrt{-1})\pi}\,,$$

supporremo $x=\pm(2n+r)$ intendendo con n un numero intero crescente in infinito, e con r una frazione minore dell'unità, e poichè $\text{sen}[x+y\sqrt{-1})]\pi$ sarà

$$=\text{sen}[\pm r+y\sqrt{-1})]\pi\,,$$

quel fattore non diverrà mai infinito: il prodotto sarà dun-

que nullo anche per $n=\infty$ ossia $x=\pm\infty$. Se si applica a questo caso la formola (7) prendendo $X=2n+r$, bisognerà comprendere tra le radici x_i le due coniugate $\pm 2n$, e l'ultimo termine del primo membro diviso per $2\sqrt{(-1)}$ sarà $\frac{\text{sen}t\cos 2un}{1+(2n)^2}$: passando poi al limite di $n=\infty$, si troveranno soddisfatte le condizioni per cui l' equazione (7) si cambia nella (8), il secondo membro di questa sarà nullo, e dal primo diviso per $2\sqrt{(-1)}\text{sen}t$ si avrà

$$(9)\quad \frac{\pi}{2}\frac{e^u+e^{-u}}{e^\pi-e^{-\pi}}=\frac{1}{2}-\frac{\cos u}{1^2+1}+\frac{\cos 2u}{2^2+1}-\frac{\cos 3u}{3^2+1}+\ldots,$$

supponendo $\pi>u>-\pi$. Questa formola é nota (*) e anzi deriva come caso particolare da un' altra di Legendre (*Exercices de Calcul Intégral*, P. IV, pag. 169), nè abbisognava quindi d'esser trovata differenziando una formola di Fourier (mezzo non sicuro rispetto alle serie trigonometriche), come sembra supporre nella citata Memoria (pag. 103) il Barone Plana il quale per errore ommette il divisore 2 del primo membro.

Alle stesse conseguenze può condurre anche la formola del *calcolo dei residui*

$$(10)\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta e^{p\sqrt{(-1)}})dp-\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha e^{p\sqrt{(-1)}})dp=\pi \mathop{\mathcal{E}}_{(\alpha)}^{(\beta)}\mathop{}_{(\pi)}^{(\pi)}\left(\frac{f(s)}{s}\right)$$

che in sostanza equivale alle altre formole del Cauchy già riferite (*Comptes rendus*, tom. XV, p. 259). Si potrà fare

$$f(s)=\frac{a-(1-a)s^2}{1+s^2}\,\frac{f(sx)}{\text{sen}\pi s}.$$

Dalla (3) si potranno dedurre altre serie d'una convergenza sempre più rapida mediante successive integrazioni

(*) V. *Opuscoli matematici e fisici*, Milano 1834, T. II, p. 112.

relative ad x e differenziazioni relative a t, ma s'introdurranno le derivate $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, . . , che Lagrange si proponeva di evitare.

5. Al Barone Plana la dimostrazione di Lagrange non parve sicura da ogni obbiezione, e però ne sostituì un'altra che giudicò *chiara ed irrefragabile* (Mem. cit. p. 102). E per verità quella dimostrazione benchè molto ingegnosa ed elegante è fondata nella serie di Taylor in casi in cui si ammette che possa esser divergente e usa equazioni fra i coefficienti α, α', α'', . . . composte di serie pur divergenti. Ma questo vizio è comune alla dimostrazione del Plana che move dalle stesse equazioni e serie divergenti, e che ha per di più l'altro difetto gravissimo di ricorrere alle due equazioni

$$1-1+1-1+\ldots=\tfrac{1}{2}\,,\quad 1^{2\lambda}-2^{2\lambda}+3^{2\lambda}-4^{2\lambda}+\ldots=0,$$

di cui la prima fu riprovata anche da Laplace e la seconda fu chiamata *orribile* da Abel (*): onde non s'intende come il Plana abbia potuto preferir la sua dimostrazione a quella di Lagrange. Egli poi vuole giustificar questa seconda equazione con una spiegazione che dice ben diversa da quella indicata a pag. 500 del calcolo differenziale d'Eulero (Mem. del Plana, p. 193): ma dimentica d'aggiungere che la medesima spiegazione è data a pag. 288-290 di quell'opera d'Eulero. Si pone

$$S=1^{2\lambda}x-2^{2\lambda}x^2+3^{2\lambda}x^3-4^{2\lambda}x^4+\ldots,$$

e facendo $x=\dfrac{y}{1-y}$ si ottiene

$$S=1^{2\lambda}y-y^2\Delta.1^{2\lambda}+y^3\Delta^2.1^{2\lambda}-\ldots,$$

ossia

$$S=\frac{x}{1+x}.1^{2\lambda}-\frac{x^2}{(1+x)^2}\Delta.1^{2\lambda}+\frac{x^3}{(1+x)^3}\Delta^2.1^{2\lambda}-\ldots:$$

(*) Laplace, ***Essai philosophique sur les probabilités***, ***Paris*** 1814, p. 83; ***Oeuvres d'Abel***, tom II, pag. 266 (Christiania 1839).

questa espressione per $x=1$ diventa

$$S=\frac{1}{2}.1^{2\lambda}-\frac{1}{2^2}\Delta.1^{2\lambda}+\frac{1}{2^3}\Delta.^21^{2\lambda}-\ldots+\frac{1}{2^{2\lambda+1}}\Delta.^{2\lambda}1^{2\lambda},$$

che si trova esser nulla qualunque valor intero positivo si assegni a λ. Solamente il Plana aggiunge ai calcoli d'Eulero che la generalità dell' eguaglianza $S=0$ si dimostra per mezzo della formola

$$\Delta^n.1^{2\lambda}=(1+n)^{2\lambda}-n.n^{2\lambda}+\frac{n(n-1)}{2}(n-1)^{2\lambda}-\text{ecc.}$$

(d.ª Mem. p. 103); ma ognuno che la sperimenti si farà capace, se non erro, che questa via è inetta all'uopo. Si potrà invece notare che nel caso di $t=0$ si ha

$$\frac{d^n.e^{tx}}{dt^n}=x^n,$$

e quindi supposto $\Delta x=1$,

$$x^n-\frac{1}{2}\Delta.x^n+\frac{1}{2^2}\Delta.^2x^n-\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\Delta.^nx^n$$

$$=\frac{d^n}{dt^n}\left[e^{tx}-\frac{1}{2}\Delta.e^{tx}+\frac{1}{2^2}\Delta.^2e^{tx}-\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\Delta.^ne^{tx}\right]$$

$$=\frac{d^n}{dt^n}\left[1-\frac{e^t-1}{2}+\ldots+\left(-\frac{e^t-1}{2}\right)^n\right]e^{tx},$$

ove tra le parentesi potranno aggiungersi gl'infiniti termini

$$\left(-\frac{e^t-1}{2}\right)^{n+1}+\left(-\frac{e^t-1}{2}\right)^{n+2}+\text{ecc.}$$

poichè il loro prodotto per t si svolgerà nella forma $At^{n+1}+Bt^{n+2}+\ldots$, e avrà nulle nel caso di $t=0$ tutte le derivate d'ordine inferiore ad $n+1$: si otterrà così l'espressione

$$2\,\frac{d.^n e^{tx}(e^t+1)^{-1}}{dt^n},$$

e fatto $x=1$ ne risulterà

$$2\,\frac{d^n.e^t(e^t+1)^{-1}}{dt^n}$$

ovvero

$$-2\,\frac{d^n.(1+e^t)^{-1}}{dt^n}$$

perchè

$$\frac{e^t}{1+e^t}=1-\frac{1}{1+e^t};$$

questa derivata si esprimerà con un numero Bernulliano se n è impari, e sarà nulla se n è pari non presentandosi potenze pari di t nel risolvimento di $(1+e^t)^{-1}$, onde si conchiuderà $S=0$.

Più generalmente, chiamata u una funzione $\psi(x)$ di x, e fatto $\Delta x=h$, $k=a^h(1-a^h)^{-1}$; l' integrazione per parti (col segno Σ) somministra

$$\Sigma a^x[(a^h-1)\,u+a^hk^n\Delta^{n+1}u]$$
$$=a^x\,(u+k\Delta u+k^2\Delta^2 u+\ldots+k^n\Delta^n u),$$

donde prendendo le differenze e ponendo

$$a^h\psi\,(x+h)-\psi\,(x)=v,$$

si trae

(11)
$$(a^h-1)\,u+a^hk^n\Delta^{n+1}u$$
$$=v+k\Delta v+k^2\Delta^2 v+\ldots+k^n\Delta^n v:$$

supposto $h=1$, $a=-1$, e però $k=-\frac{1}{2}$, e denotato con $\varphi(x)$ un polinomio di grado $n+1$ la cui differenza per $\Delta x=2$ sia x^n, facciamo $u=\varphi\,(x)-\varphi\,(x+1)$, il che darà

$$v=\varphi\,(x+2)-\varphi\,(x)=x^n,$$

e quindi

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=\frac{1}{2}x^n-\frac{1}{2^2}\Delta.x^n$$
$$+\frac{1}{2^3}\Delta.^2x^n-\ldots\pm\frac{1}{2^{n+1}}\Delta.^nx^n\,,$$

poichè u sarà un polinomio di grado n e perciò $\Delta^{n+1}u$ sarà $=0$; basterà dunque determinare $\varphi(x+1)-\varphi(x)$, e ciò sarà facile se prendesi

$$\varphi(x)=\frac{d.^n e^{tx}(e^{2t}-1)^{-1}}{dt^n}$$

supponendo $t=0$. Per n pari sarà

$$\varphi(2)-\varphi(1)=0 \quad \text{e così} \quad S=0$$

Rispetto all'equazione $\frac{1}{2}=1-1+1-$ ecc., il Plana la usa anche in altra Memoria (Accad. di Torino, 2.ª serie T. XIV, p. 29), e la combina con la seguente che avrebbe pur mosso Abel a ribrezzo

$$\frac{2\varphi}{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}=2\left[\frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{\pi^2}}-\frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{4\pi^2}}+\frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{9\pi^2}}-\ldots\right]$$

poichè i termini della serie in luogo di scemare vanno crescendo. Ma quivi riconosce con Poisson (p. 40) che la serie

$$\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\text{ecc.}$$

non ha per sè stessa valor determinato, e seguendo similmente Poisson, ne moltiplica i termini per le potenze d'una quantità $p<1$, che in fine riduce al suo limite 1.

Con tali trasformazioni egli intende spiegare il *mode d'existence* delle formule a cui ricorre, ma non giustifica perciò le sue dimostrazioni che più non condurrebbero alla meta se vi si usassero in luogo di quelle formole le loro tra-

sformate, sicchè restano unicamente fondate nell'uso di serie divergenti non più tollerato oggi da'geometri.

6. Gauss considerando una serie ipergeometrica (*Comm. Gotting. recent.* tom. II, 30 genn. 1812, pag. 4) avverte che per $x > 1$ « series si non statim tamen post certum intervallum necessario divergens erit, ita ut de ipsius *summa* sermo esse nequeat.... Patet itaque .... questionem ineptam esse quisnam sit valor seriei pro valore ipsius x unitate majori. » Altrove (d. tomo, 18 marzo 1813, p. 24). disapprova il metodo dell'Ivory nella questione dell'attrazione degli sferoidi perchè « considerationi serierum infinitarum non semper convergentium innititur ».

Più energicamente dichiara Abel (al luogo citato) il suo giudizio intorno alle serie divergenti: « c'est une honte qu'on se soit avisé d'y fonder aucune démonstration. On peut démontrer tout ce qu'on veut en les employant, et ce sont elles ... qui ont enfanté tant de paradoxes. »

Riferirò anche l'opinione di Poisson allegata da Binet (*Journal de l'école polytechnique. 27 cahier*, p. 242): «Quelquefois on a paru croire, q'une série divergente pouvait être employée dans des calculs analytiques à la place de la fonction, et quoique cette erreur soit loin d'être générale parmi les géométres, il n'est cependant pas inutile de la signaler car les résultats aux quels on parvient par l'intermédiaire des suites divergentes sont toujours incertains, et le plus souvent inexacts. »

E il Binet abbracciando questa opinione (V. ivi p. 125) proponevasi di sostituire ai metodi antichi « les résultats que la rigueur algébrique et peut-être même la dignité de la science réclamaient depuis longtemps » (p. 128); e conchiudeva: «le caractére des sciences mathématiques demande impérieusement que le principe de l'exactitude des méthodes soit discuté et mis hors de doute; si l'état de la science analytique a pu exiger, autrefois, que l'on abandonnât quelque

chose de la rigueur des méthodes, dans le vue de les simplifier ou d'aborder des difficultés très épineuses, on doit maintenant s'efforcer d'apprécier, à un certain degré, l'effet de ce qui a été négligé. . . » (pag. 343). (*).

Un esempio notabile degli errori che nascono dalla serie divergenti fu dato dal Cauchy nel tom. I della collezione *des Savants étrangers* (1827) pag. 183. L'integrale duplicato

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cos(2k\sqrt{xy})\operatorname{sen}(x+y)dxdy,$$

se introducasi sotto i segni d'integrazione il fattore $e^{-\alpha x-\beta y}$ e suppongansi α e β costanti positive infinitesime, ha per limite zero nel caso di $k<1$, e all'incontro

$$-\frac{\pi}{2}k(k^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$

nel caso di $k>1$. Pure svolgendo $\cos(2k\sqrt{xy})$ per le potenze ascendenti di k si troverà che tutti i termini dell'integrale si annullano qualunque sia k: questa discordanza che s'incontra adoperando una serie sempre convergente mostra (egli dice) la circospezione con cui deve ricorrersi alle serie. Ma la serie che rappresenta $\cos kz$ sebben convergente per z anche grandissimo è divergente per z infinito come $\cos kz$ allora è indeterminato, e ciò rende divergente la nuova serie formata coll'integrazione: infatti si ha

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx\operatorname{sen}x = \frac{1}{1+\alpha^2} = 1-\alpha^2+\alpha^4-\ldots,$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx\cos x = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} = \alpha-\alpha^3+\ldots$$

e differenziando se ne traggono

(*) V. anche Piola, *trattato degl'integrali definiti*, Cap. VI e XIV (*Opuscoli matematici e fisici*, tomo II).

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^n dx \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^n dx \cos x \ ,$$

che avranno per primo termine

$$\pm 1.2. \ . \ . \ n \quad \text{e} \quad \pm 2.3 \ . \ . \ . \ (n+1)\alpha;$$

cambiando α in β e x in y, e sostituendo si vedrà che trascurati i termini di più dimensioni rispetto ad α e β, la serie avrà coefficienti numerici della forma

$$\frac{1.2.3 \quad . \quad . \quad . \quad n}{(n+2)(n+3) \ \ldots \ 2n}$$

e sarà divergente quando k supera l'unità.

Si debbono pure alla divergenza delle serie i paradossi che presenta la dottrina delle sezioni angolari, e che da niuno prima di Abel erano stati pienamente chiariti, neppure dal Poinsot il quale volle invece dedurne la spiegazione dalla moltiplicità dei valori de'radicali. Lacroix (*Traité du calc. diff. et int.* tom. III pag. 621, *Paris* 1819) riferisce un metodo del sig. Deflers per provare che la serie

$$\operatorname{sen} nx + \frac{n}{1} \operatorname{sen}(n-2)x + \text{ecc.}$$

è sempre nulla qualunque sia x, mentre è noto ch' essa non é tale per $x = \pi$, $n = \frac{1}{3}$, ed è divergente a cagion d'esempio per $n = -1$. A tal fine si ordina la serie secondo le potenze di x e si dimostra che ogni coefficiente si riduce a zero: considerando un' altra serie

$$T_i = n^i t^n + \frac{n}{1}(n-2)^i t^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^i t^{n-4} + \ . \ . \ .$$

e calcolando T_i per i impari e $t = 1$ si trova $T_i = 0$. Ma nel caso di

$n = -1$ si ha $T_i = -1 + 3^i - 5^i + \ldots$

tutt'altro che zero; onde si vede qual conto debba farsi di codeste dimostrazioni fondate sopra serie di cui non è prima accertata le convergenza.

7. A questi esempi altri possiamo aggiungerne relativi alla celebre serie con cui da Lagrange fu sciolta l'equazione $x = u + \varphi(x)$. Nella collezione de' *Savants etrangers* dell'Istituto di Francia (tom. I, anno 1805, p. 567) Parseval sommò quella serie e ne inferì che la radice espressa è quella x per cui la differenza $x - u$ *sia numericamente minore dell'unità;* emendando il suo metodo si può dedurne un teorema esatto, cioè quello stesso teorema che in altro modo fu dimostrato dal signor Geronimo Frontera in una *Tesi* pubblicata a Parigi nel 1851.

In parecchi suoi scritti (Mem. Accad. di Torino, 2.ª serie, tom. VIII e X, e Antologia Italiana, tom. II) il ch. cav. Menabrea intese rivocar in dubbio un teorema trovato e dimostrato con grande acume dal prof. Chiò, provando che le serie dedotte dalle due equazioni

$$u - x + f(x) = 0\,, \quad h - x + F(x) = 0$$

esprimono la medesima radice se pongasi

$$u = h + k, \quad k + f(x) = F(x).$$

Accompagnò la sua dimostrazione di calcoli prolissi fatti dal prof. Olivero sopra un caso particolare, ma in luogo di questa maniera insufficiente di conferma poteva facilmente trovar il termine generale delle due serie. Perocchè posto

$$x_1 = u + fu + \sum \frac{d^{n-1}.(fu)^n}{1.2\ldots n du^{n-1}}\,,$$

$$x_2 = h + Fh + \sum \frac{d^{n-1}.(Fh)^n}{1.2\ldots n dh^{n-1}}\,,$$

ne segue

$$x_1 = h + k + f(h+k) + \sum \frac{d^{n-1}.[f(h+k)]^n}{1.2...ndh^{n-1}},$$

$$x_2 = h + (k+fh) + \sum \frac{d^{n-1}.(k+fh)^n}{1.2...ndh^{n-1}}.$$

Ora facendo

$$\frac{d^{n-1}.(fh)^n}{dh^{n-1}} = \varphi(h),$$

si avrà dal teorema di Taylor

$$\frac{k^m}{1.2...m}\frac{d^m\varphi(h)}{dh^m}$$

pel termine generale di $\varphi(h+k)$ ossia

$$\frac{d^{n-1}.[f(h+k)]^n}{dh^{n-1}},$$

onde il termine generale di x_1 sarà

$$\frac{k^m}{1.2...m}\frac{d^{m+n-1}.(fh)^n}{1.2...ndh^{m+n-1}}.$$

D'altra parte la formola del binomio dà

$$\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{1.2...m}(fh)^{n-m}k^m$$

pel termine generale della potenza $(k+fh)^n$, e quindi il termine generale di x_1 risulta

$$\frac{k^m}{1.2...m}\frac{n(n-1...(n-m+1)}{1.2...n}\frac{d^{n-1}.(fh)^{n-m}}{dh^{n-1}},$$

e cambiato n in $n+m$ collima con quello di x_1.

Ma per conchiuderne $x_1 = x_2$, bisognerebbe aver dimostrato che tutte le serie di cui s'è fatto uso sono convergenti: senza questa prova, i calcoli riferiti servono a nulla, anzi producendo conseguenza contraria ad un teorema la

cui verità è con mezzi esatti stabilita, pongono in chiaro quanta circospezione si debba avere nell' uso delle serie.

Lo stesso insegnamento deriva dall'errore che Lagrange commise nell' assegnare il carattere della radice espressa dalla sua serie : intorno a che credo non inopportuno di esporre qual sia a mio parere il vizio della sua dimostrazione. Parmi ch' esso consista nella *sostituzione della serie intera alla parte che contiene le potenze negative di u*. È vero che svolgendo $\frac{1}{x^n}$ ovvero $\frac{\psi(x)}{x^n}$, le potenze positive si presenteranno in termini tanto più inoltrati quanto sarà più grande l'esponente n, ma essi formeranno sempre una serie infinita che potrà offrire una somma apprezzabile anche a confronto della somma dei termini contenenti le potenze negative; è vero ancora che i termini lontani possono essere negletti in virtù della convergenza, ma entrando il numero n nei coefficienti, può darsi che la convergenza divenga più lenta al crescere di n. Per chiarire con un esempio queste riflessioni prendiamo la serie

$$x^{-r}+\frac{n}{1}x^{-(r-1)}+\frac{n(n+1)}{1.2}x^{-(r-2)}$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^{-(r-3)}+\text{ ecc.}$$

che senza dubbio è convergente finchè il modulo di x è inferiore ad 1 ed è allora il risolvimento di $x^{-r}(1-x)^{-n}$; tuttavia i suoi termini sono crescenti finchè si avrà

$$\frac{m+1}{n+m}<x, \quad \text{ossia} \quad m<\frac{nx-1}{1-x},$$

supposto x reale e positivo, e chiamato m il numero dei termini antecedenti a quello che si considera. Ora preso un numero determinato k minore di x, se facciamo r eguale

ad una frazione di $\frac{nk-1}{1-k}$ non maggiore della metà di questo numero qual sarebbe ponendo $r = \frac{1}{3}\frac{nk-1}{1-k}$, r crescerà indefinitamente con n, e perciò le potenze positive di x compariranno tanto più tardi quanto n sarà più grande; ma non perciò la parte che conterrà queste potenze potrà mai esser trascurata a fronte dell' altra, poichè le potenze positive si mostreranno appena sarà $m > r$, e da questo termine insino a quello in cui m eguaglierà il massimo numero intero contenuto in

$$\frac{nx-1}{1-x}\left(\text{essendo}\quad r < \frac{1}{3}\,\frac{nx-1}{1-x}\right)$$

la serie resterà crescente, in guisa che la seconda parte supererà il valore della prima. Non sarà dunque lecito, neppure per n infinito, di trascurare le potenze positive di x.

Si osservi di più quanto alla serie di Lagrange che se α denota la radice da essa rappresentata, la serie intera quale si troverà per esprimere la funzione $\frac{\psi(x)}{x^n}$ darà sempre $\frac{\psi(\alpha)}{\alpha^n}$ mentre la parte limitata alle potenze negative di u rappresenta la somma $S\,\frac{\psi(x)}{x^n}$ il cui limite per $n=\infty$ dipende dalla scelta della funzione ψ come ha mostrato anche Eulero nell' *Introd. in Anal. Infin.* §§. 344, 349. ecc. laonde si fa palese che non può in generale essere esatto di sostituire a questa parte la serie intera.

Il medesimo vizio si riconoscerà nella dimostrazione d'Eulero, che giusta un'osservazione di Arbogast ripetuta dal cav. Menabrea propose lo stesso teorema nel tomo XV dei

Novi Comm. Acad. Petropol. (*), nelle altre dovute ad Arbogast, e in quella di Lambert che fu la prima (Accad. di Berlino, 1770, pag. 227).

Le considerazioni che precedono mostrano pure l'insufficienza del raziocinio e dei calcoli da'quali il cav. Menabrea volle desumere che il teorema di Eulero e Lagrange è vero ogni qualvolta la serie è convergente secondo la regola data da esso Lagrange (Accad. di Torino, 2.ª serie, tom. X, p. 115-125).

8. L'uso delle serie divergenti, anche quando le formole a cui guida non sono del tutto erronee, è inetto a determinare le condizioni e i casi ne'quali esse sussistono. Così dalle dimostrazioni di Lagrange e del B. Plana non si può conoscere per quali funzioni siano esatte le formole (3) e (4). Il Plana risguardandole come generalmente esatte le applica alle funzioni

$$\varphi t = \sqrt{t}, \quad \varphi t = \sqrt{(at - t^2)},$$

e trova espressioni immaginarie che debbono equivalere a quantità reali, ma crede che il *resto* della série possa ristabilire l' eguaglianza (loc. cit. p. 104); la quale spiegazione accennata senza indicare alcun mezzo di determinare quel resto sarà giudicata insufficiente, poichè niuno concederà che possano essere quali si vogliano i primi termini d'una serie salvo il correggere l'errore col sottintendere un resto opportuno. Lo stesso Plana riconobbe la necessità di altri schiarimenti « afin d' éviter toute méprise dans les applications que l'on voudrait faire de la série de *Lagrange* dont il est ici question » (ivi p. 105). Duolci che i suoi schiarimenti contengano inesattezze da cui riesce sempre più oscurata la materia.

(*) Arbogast, *Calcul des dérivations*, n. 335. p. 291. Si deve parimente ad Arbogast l'altra osservazione delle relazioni tra la formola di Lagrange e i metodi d'approssimazione di Newton e Daniele Bernoulli (ivi, n. 340, p. 296).

Posto

$$A_m = \int_0^a du\varphi(u) \cos \frac{m\pi u}{a} ,$$

abbiamo

$$a\varphi(t \pm kx) = \int_0^a du\varphi(u) + 2\sum_1^{\infty} A_m \cos \frac{m\pi(t \pm kx)}{a}$$

sotto la condizione $0 < t \pm kx < a$, e ricordando il significato di $f(x)$ ne deduciamo

$$af(kx) = \int_0^a du\varphi(u) + 2\sum A_m \cos \frac{m\pi t}{a} \cos \frac{m\pi kx}{a} ,$$

e poscia

$$a\left[\frac{f(0)}{2} - \frac{f(x)}{1^2+1} + \frac{f(2x)}{2^2+1} - \frac{f(3x)}{3^2+1} + \ldots\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{3^2+1} + \ldots\right] \int_0^a du\varphi(u)$$

$$+ 2\sum A_m \cos \frac{m\pi t}{a}\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos x_m}{1^2+1} + \frac{\cos 2x_m}{2^2+1} + \frac{\cos 3x_m}{3^2+1} + \ldots\right],$$

ove con x_m denotiamo l'angolo compreso tra $\pm\pi$, che differisce da $\frac{m\pi x}{a}$ d' un moltiplice di 2π. Stese le serie in infinito, il secondo membro eguaglierà per la formola (9) l'espressione

$$\frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}}\left[\int_0^a du\varphi(u) + \sum A_m \left(e^{x_m} + e^{-x_m} \right) \cos \frac{m\pi t}{a}\right],$$

talchè la serie (3) esprimerebbe

$$\frac{1}{a}\left[\int_0^a du\varphi(u) + \sum A_m \left(e^{x_m} + e^{-x_m} \right) \cos \frac{m\pi t}{a}\right] ;$$

ma la condizione annunciata impedisce che k si possa far infinito e però, che si possano stendere in infinito le serie precedenti. Tale è nondimeno il metodo usato dal B. Plana ne' casi di $\varphi t = \sqrt{t}$, $\varphi t = \sqrt{(at - t^2)}$, nei quali esprime quantità immaginarie con serie convergenti reali, conchiusione troppo singolare: inoltre egli dà per somma della serie di Lagrange nel primo caso

$$\frac{2}{3}\sqrt{a} + \frac{2}{a}\sum A_m\left(e^{\frac{m\pi x}{a}} + e^{-\frac{m\pi x}{a}}\right)\cos\frac{m\pi t}{a},$$

espressione erronea pel coefficiente 2, che ha introdotto per avere ommesso il divisore 2 nel primo membro della formola (9), ed erronea per l'esponente $\frac{m\pi x}{a}$ che deve cambiarsi in x_m. Del pari errata pel coefficiente e per l'esponente è l'espressione

$$\frac{2}{a}\sum_{1}^{\infty} A_{(m)}\left(e^{\frac{m\pi x}{a}} + e^{-\frac{m\pi x}{a}}\right)\text{sen}\,\frac{m\pi t}{a}$$

ch'egli trova nel secondo caso.

Anche nell'altra sua memoria già citata (num. 5), il B. Plana considera alcune serie trigonometriche, e dimostra una formola sommatoria data da Poisson nel tom. VI delle Memorie dell'Istituto, ma la conchiude dalla formola sommatoria spesso divergente di Maclaurin, mentre ora si hanno dimostrazioni pienamente rigorose di quelle serie (per esempio la dimostrazione del signor Dirichlet), e introduce una restrizione non necessaria quando per determinare $\Sigma_k F(\omega k)$ considera integrali fra i limiti 0 ed a, e assumendo

$$m = \frac{2i\pi}{\omega},\ i = 1, 2, 3, \ldots,$$

suppone ma multiplo di π, il che richiede sia $\frac{2a}{\omega}$ un numer intero (d. Mem. pag. 33-41).

9. Dalle formole (3) e (4) di Lagrange si può dedurre una conseguenza relativa al teorema di Fourier contenuto nell'equazione

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu du \int_0^\infty f(v)\cos uv dv \ .$$

Se chiamiamo u' una quantità compresa tra π, e, $-\pi$, e tale che $\frac{ux - u'}{2\pi}$ sia un numero intero o nullo, avremo

$$\cos xu = \cos u'$$

e però

(12) $$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos u' du \int_0^\infty f(v)\cos uv dv \ ,$$

e anche

$$\frac{f(0)}{2} - \frac{f(x)}{1^2+1} + \frac{f(2x)}{2^2+1} - \frac{f(3x)}{3^2+1} + \dots$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos u'}{1^2+1} + \frac{\cos 2u'}{2^2+1} - \dots\right] du \int_0^\infty f(v)\cos uv dv \ ,$$

donde per le formole (3), (4), e (9), supposto $a = 1$ nelle prime, si trae

$$\mathrm{F}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \, \frac{e^{u'} + e^{-u'}}{2} \int_0^\infty f(v)\cos uv dv \ ,$$

ossia

(13) $$f[x\sqrt{(-1)}] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(u'\sqrt{-1}) du \int_0^\infty f(v)\cos uv dv \ .$$

Dal paragone di questa con la (12) si scorge che quando la funzione $f(x)$ soddisfaccia alle condizioni che si richiedono per la esattezza delle mentovate formole di Lagrange, il teorema (12) di Fourier potrà applicarsi a valori immaginari di x non aventi parte reale.

10. Rispetto al problema fisico menzionato da principio,

note sono le speculazioni de' chiari geometri Venturoli, Tadini, Giulio, Piola, Mossotti e Turazza per una soluzione rigorosa e svincolata da ogni arbitraria ipotesi: disgraziatamente le conchiusioni a cui vennero o sono molto meno generali ch'essi non pensarono o non corrispondono ad alcuna specie di moto che s'incontri realmente in natura, siccome mostrò il prof. Bellavitis quanto alla maggior parte delle accennate soluzioni (*) e siccome è lecito affermare similmente per le altre. Ma è notabile che lo stesso Lagrange aveva già per qualche caso ottenuto nella sopra citata Memoria tali formole da cui apparisce l' insufficienza delle nuove soluzioni (*V. Miscell. taurin.* T. III, p. 206-211). Supposto che il vaso sia simmetrico intorno all'asse delle t, Lagrange riduce la determinazione delle velocità al trovare una funzione φ che soddisfaccia alla condizione

$$\varphi(t+x\sqrt{-1})\pm\varphi(t-x\sqrt{-1})=\mathrm{H}$$

ove H è una costante e x dipende da t per l'equazione delle pareti. Se queste sono rettilinee fa $x=h+kt$, trasforma la condizione precedente in un'equazion differenziale d'ordine infinito, e integrandola, dopo aver posto

$$k=\tang\omega\,,\quad (h+kt)^{\frac{\pi}{2\omega}}=z$$

trova che al segno $+$ corrisponde

$$\varphi(t)=\tfrac{1}{2}\mathrm{H}+\mathrm{A}z+az^{-1}+\mathrm{B}z^{3}+bz^{-3}+\ldots,$$

e che al segno $-$ corrisponde

$$\varphi(t)=\frac{\mathrm{H}}{\pi\sqrt{(-1)}}\log z+\mathrm{A}z^{2}+az^{-2}+\mathrm{B}z^{4}+bz^{-4}+\ldots+\mathrm{H}',$$

ove A, a, B, b, ecc. H$'$ sono costanti arbitrarie in numero

(*) Veggasi una sua Memoria del 1845 pubblicata nei *Novi Commentarii* dell'Istituto di Bologna, Vol. VIII.

infinito. Se $h=0$, si potrà nella prima espressione di $\varphi(t)$ ridurre z a

$$t^{\frac{\pi}{2\omega}},$$

e allora nel caso di $H=0$, $\omega=\frac{\pi}{2}$, essa si accorderà pienamente con una formula data dal prof. Bellavitis nel num. 24 della sua Memoria. Lagrange applica pure questo metodo al caso d'un canale rettilineo di larghezza costante e spiega come si debba procedere quando l'asse delle t non divida il caso in due parti eguali e simili.

Ora il Venturoli (*) volendo determinare il moto d'un velo fluido raccolto fra due rette $y=0$, $y=bx$, giunge all'equazione

$$\frac{1-b\sqrt{(-1)}}{1+b\sqrt{(-1)}}\,F(x-y\sqrt{-1})-F(x+y\sqrt{-1})=0$$

e considerandola come un'equazione a differenze finite, ne deduce $F(s)=\frac{A}{s}$ con una sola costante A. Ponendo

$$sF(s)=\varphi(s)\,,\quad H=0\,,\ h=0\,,$$

si farà che l'equazione del Venturoli sia compresa in quella di Lagrange e si avrà quindi

$$\varphi(t)=H'+Az^{2}+az^{-2}+Bz+bz^{-4}+\ldots;$$

onde si vede quanto sia particolare la soluzione data dal primo la quale corrisponde a $\varphi(t)=H'$, e trascura i termini contenenti

$$z=t^{\frac{\pi}{2\omega}},$$

(*) Elementi di Meccanica e d'Idraulica. Vol. II. pag. 372 (Milano 1818).

supposta $y = x \tan g\omega$ l'equazione della seconda parete. Tale imperfezione nasce fuor di dubbio dall'aver cambiate in semplici costanti le funzioni periodiche arbitrarie. L'espressione di $F(t)$ può anche mettersi sotto la forma

$$F(t) = \frac{\psi(z) + \psi(-z)}{t},$$

indicando con ψ una funzione arbitraria; ed in effetto questa espressione soddisfarà sempre alla precedente equazione.

Osservo che Dalembert giudicava illusoria e inetta a rappresentare il moto del fluido nel caso delle pareti rettilinee e in molti altri l'equazióne

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{(-1)}$$

(*Miscell. taur.* T. III. p. 386.)

Relativamente ad un vaso formato di due pareti rettilinee e parallele, Lagrange dedusse dalle formole (3) e (4) altre espressioni delle velocità che contengono funzioni arbitrarie (ivi p. 217-221).

Dalle cose premesse si può eziandio conchiudere che i metodi esposti dal Piola come generali per l'integrazione di alcune equazioni a derivate parziali nel primo volume delle Memorie dell'Istituto Lombardo, conducono invece ad integrali affatto particolari.

SUR QUATRE PERSONNAGES APPELLÉS THRASYLLE EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE PAR M. TH. HENRI MARTIN DOYEN DE LA FACULTÉ DE RENNES A M. B. BONCOMPAGNI

en date de Rennes le 18 mars 1856.

Arrivons à la question des Thrasylles. J'ai maintenant sur ce point une opinion bien arrêtée, et assez motivée pour qu'il me soit permis d'espérer de vous la faire partager.

Je commence par résumer les témoignages sous quatre numéros.

I.° Un compositeur de musique, nommé Thrasylle de Phlionte, est cité par Plutarque dans son traité *de la Musique* (1).

II.° Un mathématicien nommé Thrasylle est cité par Théon de Smyrne, par Nicomaque de Gérase, par Porphyre et par Achillés Tatius (2), comme s'étant occupé de la théorie mathématique des nombres musicaux et de la musique des sphéres célestes.

III.° Un favori d'Auguste et de Tibére, nommé Thrasylle, est mentionné par Tacite, par Svétone, par Dion Cassius, par Themistius, par l'empereur Julien et par le

---

(1) Voyez Plutarque, *De la musique*, c. XXI, p. 1137 F.

(2) Voyez Théon de Smyrne, *Musique* c. II. c. XXXIV et c. XXXVI (c'est à dire *Arithmetique*, c. XXXIV, LXVI et LXVIII), p. 74, 137 et 145—146, ed. de Boulliau; *Astronomie*; *Epilogue*, p. 340; Nicomaque, *harmoniques*, I, pag. 24 de Meybaum; Porphyre, sur les *harmoniques* de Ptolèmée, I, 5 (Wallisii, Opera, t. 3, p. 266 et 270); et Achilles Tatius, *Introduction aux Phénoménes*, c. XVI, p. 136 (Petavii Uranologium, 1630, in folio).

scoliaste de Juvénal (1); il est désigné comme philosophe platonicien par Themistius, par l'empereur Julien, par Svétone et par le scoliaste de Juvénal; comme écrivain sur la philosophie platonicienne et pythagoricienne par Diogène de Laërte et par Porphyre (2), comme astrologue par Tacite, par Svétone et par Dion Cassius (3): comme écrivain sur l'astronomie et sur l'astrologie par Achillès Tatius et par Démophile (4).

IV.° Un historien nommé Trasylle de Mendes, remarquable par un esprit grossièrement et ridiculement superstitieux, est cité par Pline, par l'auteur du traité *des fleuves* attribué à Plutarque, par Jean de Stobi et par Clément d'Alexandrie (5).

Maintenant voyons ce qu'il faut conclure de ces témoignages.

Dans la Dissertation qui précède mon édition de l'*Astronomie* de Théon de Smyrne (p. 69-72), j'ai dit que le mathématicien Thrasylle (n°. II) cité par cet auteur doit être distingué de l'historien Thrasylle de Mendes (n°. IV). Je croyais alors pouvoir prouver la nécessité de cette distinction, en disant que le methématicien Thrasylle était de

---

(1) Voyez Tacite, *Annales*, IV, 20—22; Svétone, *Tibére*, c. XIV et LXII, et *Caligula* c. XIX; Dion Cassius, LV, 11, LVII, 15, et LVIII, 27—28; Thémistius, *Discours* V, p. 63, et *Discours* XI, p. 145 de Morel; l'empereur Julien, *á Thémistius*, p. 489 de Pétau, et le Scoliaste de Juvénal sur la *Satire* VI, v. 472.

(2) Voyez Diogéne de Laërte, IX, 37, 38, 41, 45, et III, 1, et Porphyre, *Vie de Plotin* (dans la *Biblioth. gr.* de Fabricius, t. 4, p. 130 de l'ancienne édition).

(3) Aux endroits cités dans la note 3.

(4) Voyez Achilles Tatius, cité dans la note 2, et Démophile, *Scolies sur l'ouvrage astrologique de Ptolémée*, p. 195 (Bâle, 1559, in folio).

(5) Voyez Pline XXXII, 9 (5) et I, index des livres II, IX, et XXXI; le faux Plutarque *des fleuves*, c. XI et XVI; Jean de Stobi, *Anthologie*, titre 100, p. 541 de Gessner et Clément *Stromates*, I, p. 335 D (Paris 1641, in folio).

Phlionte et non de Mendes: cette preuve disparaît, parceque le mathématicien Thrasylle doit être distingué du musicien de Phlionte mentionné par Plutarque. Mais une seconde preuve subsiste: c'est qu'il n'y a nulle apparance que cet historien stupidement superstitieux soit le même que le mathématicien philosophe, qui était astrologue, il est vrai, mais trés sensé à cela prés, comme tant d'autres penseurs et savants de l'antiquité, par exemple, comme l'astronome Ptolémée, dont les ouvrages astrologiques sont, quoi que quelques critiques modernes en aient pu dire, parfaitement authentiques.

Dans la même dissertation, j'ai admis que le mathématicien Thrasylle (n°. II), cité par Théon de Smyrne, est le même personnage que le philosophe platonicien et pythagoricien Thrasylle (n.° III), ami d'Auguste et de Tibère. Je persiste entiérement dans cette opinion par les motisfs suivants 1.° Théon de Smyrne, Nicomaque de Gérase, Porphyre et Achillés Tatius sont des philosophes platoniciens et pythagoriciens, en même temps que des mathématiciens; les auteurs qu'ils citent dans leurs ouvrages mathématiques ont en général le même double caractére de mathématiciens et de philosophes. Thrasylle, cité par eux, et cité notamment par Théon de Smyrne, par Porphyre et par Achillés Tatius à côté de Dercyllidés et d'Adraste, est un philosophe mathématicien comme Dercyllidés et comme Adraste (1), et probablement à peu prés de la même époqne, c'est-à-dire entre l'avénement d'Auguste et le commencement des Antonins. 2.° Nous savons par Théon de Smyrne que le mathématicien Thrasylle (n.° II) avait écrit sur la musique des sphères célestes; et nous savons par Achillés Tatius et par Démophile que le philosophe Thrasylle (n°. III) avait écrit sur l'astro-

(1) Sur Dercyllidès et sur Adraste, Voyez ma Dissertation en tête de mon édition de l'*Astronomie* de Théon de Smyrne, p. 72—79.

nomie et sur l'astrologie. Or Achillés Tatius, dans un même ouvrage et à trois chapitres de distance, a cité le traité de Thrasylle sur la musique des spéres célestes et le traité astronomique de Thrasylle sur le soleil. Le mathématicien Trasylle (n°. II) écrivain sur la musique, et le philosophe Thrasylle (n°. III), écrivain sur l'astronomie, sont donc bien un seul et même personnage, qui n'est autre que le platonicien favori d'Auguste et de Tibère, astrologue suivant le témoignage des auteurs qui parlent de sa liaison avec ses deux empereurs, écrivain sur l'astrologie suivant le témoignage de Démophile.

Puis qu' il est certain que le mathématicien Thrasylle (n°. II) cité par Théon de Smyrne, par Nicomaque, par Porphyre et par Achillès Tatius est le même que Thrasylle (n°. III) contemporain d' Auguste et de Tibére, il ne peut pas être le meme que Thrasylle de Phlionte (n°.I) cité par Plutarque à côté des musiciens *antiques* Tyrtée de Mantinée et André de Corinthe. D'ailleurs, contre cette identification, outre la raison chronologique, il y en a encore une autre : c' est que Thrasylle de Phlionte nous est cité par Plutarque comme un artiste *compositeur de musique*, tandisque Thrasylle cité par Théon de Smyrne n' est nullement un *musicien* dans cette acception du mot, ainsi que Burette l'a fort bien remarqué. Théon de Smyrne (1) distingue dans la musique trois parties, savoir: 1°. la *musique arithmetique* (ἡ ἐν ἀριθμοῖς μουσική), ou théorie des nombres musicaux, qu'il annonce l'intention de traiter comme partie intégrante de l'aritmétique, et qui, en effet, dans son *Arithmétique* composée de 93 chapitres, occupe les chapitres 33-68 (2) ; 2°. la *musique organique* (ἡ ἐν ὀργάνοις)

(1) *Arithmétique*, c. II, p. 21. *Musique*, c. I. et c. XXXVI (c'est-à-dire *arithmétique*) c. XXXIII, et c. LXVIII. p. 73—74 et p. 145 et suiv. de Boulliau; *Astronomie*, Epilogue, p. 338.

(2) Voyez ma Dissertation en tête de mon édition de l'*astronomie*

c'est-à-dire la musique vocale et instrumentale, la musique pratique des artistes, qu'il exclut du plan de ses travaux comme étrangère à ses études de philosophie et de mathématiques; 3.° la *musique cosmique* (ἡ ἐγκόσμῳ), ou musique des sphères célestes, que Théon avait dû traiter à la suite de son *Astronomie*, comme se rattachant à la science des astres. Thrasylle le mathématicien avait écrit sur la *musique arithmétique* et sur la *musique cosmique*, et tout bien considéré, rien ne prouve, qu'il ait écrit aussi sur la *musique organique*; car son traité de l'*heptacorde* concernait probablement la théorie mathématique des Pythagoriciens sur les sons musicaux (1). Au surplus, peu importe pour notre question. Mais ce qu'il importe de constater ici, c'est que si, dans son commentaire *sur la formation de l'âme suivant le-Timée de Platon*, Plutarque s'est occupé de la *musique arithmétique* et de la *musique cosmique*, au contraire son traité *de la Musique* a pour objet spécial l'histoire des origines de la *musique organique* c' est-à-dire de la pratique de l'art musical, et non la théorie des nombres musicaux. Thrasylle de Phlionte, que Plutarque cite dans ce dernier ouvrage à côté de Tyrtée de Mantinée et d'André de Corinthe, etait comme eux, un *antique compositeur de musique*. Il n'y a donc ni motif, ni prétexte pour transformer Thrasylle de Phlionte en un mathématicien philosophe, tel que furent Philolaüs et Platon, dont Plutarque ne parle pas dans son

---

dé Théon de Smyrne, p. 15—17. C'est à tort que Bouilliau, dans son édition, a divisé l'*Arithmetique* de Théon de Smyrne en deux parties, en donnant aux 32 premiers chapitres le titre d'Arithmétique de Théon de Smyrne en deux parties, et aux 61 derniers le titre de *Musique*, tandisque les 25 derniers ne concernent pas la musique. C'est de même a tort qu'en donnant une édition des 32 premiers chapitres, M. Van Gelder a cru donner une édition de toute l'*arithmetique* de Théon.

(1) Sur le traité de l'*heptacorde*, voyez Porphyre, dans les *Opera Mathematica* de Wallis, t. 3, pag. 270. Comparez ibidem, t. 3, p. 266, et Nicomaque, *harmoniques*, I, p. 20 t. 1 des *Musici veteres* de Meybaum.

traité *de la musique*, et tel que furent plus tard Thrasylle ami d'Auguste et de Tibère, Dercyllidès, Adraste, Théon de Smyrne et Nicomaque.

En résumé, il y a donc lieu de distinguer: 1.° Thrasylle de Phlionte, antique compositeur de musique; 2.° Thrasylle favori d'Auguste et de Tibère, philosophe platonicien et pythagorici n, mathématicien, astronome, astrologue, auteur d'ouvrages sur la philosophie platonicien et pythagoricienne, sur l'astronomie, sur l'astrologie, sur *la musique cosmique* et sur la *musique arithmetique*; 3.° l'historien superstitieux Thrasylle de Mendes. Le Thrasylle cité par Théon de Smyrne et par Nicomaque est le second de ces trois personnages et n'est pas de tout le musicien pratique Thrasylle de Phlionte.

CHAPITRES IX[e] ET XX[e] DU LIVRE SECOND DE L'INTRODUCTION ARITHMÉTIQUE DE NICOMAQUE DE GÉRASE TRADUITS DU GREC EN FRANCAIS PAR M. TH. HENRI MARTIN.

Doyen de la Faculté de Lettres de Rennes Membre correspondant de l'Institut de France et de l'académie des sciences de Berlin.

AVEC DES REMARQUES DU TRADUCTEUR SUR CES CHAPITRES

CHAP. 9. Le nombre carré est celui qui vient à la suite du précédent, et qui, dans le tracé géométrique, ne donne plus, comme lui, trois angles, mais quatre angles, toujours pourtant en une figure équilatérale: tels sont les nombres 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100. Car les tracés géométriques de ces nombres deviennent des figures quadrangulaires équilatérales, de la manière suivante:

N. B. Le texte suppose évidemment des figures qui manquent dans l'édition et dans les manuscrits.

et ainsi de suite, jusqu'où l'on veut. Du reste, ces nombres ont cela de commun avec les précédents, que l'accroissement des côtés suit la série naturelle des nombres. En effet, celui de ces nombres qui est le premier carré *virtuel*, c'est-à-dire le nombre 1, a pour côté l'unité; celui qui est le premier carré *effectif*, le nombre 4, a pour côté 2; celui qui est le second carré effectif, le nombre 9, a pour côté 3; celui d'après, qui est le troisième carré effectif, le nombre 16, a pour côté 4 ; le quatrième a pour côté 5 ; le cinquième 6 ; et de même, en général, les suivants ont pour côtés les nombres suivants. Le nombre carré est engendré, lui aussi, de la série naturelle des nombres ex-

posée en rang, non plus en ajoutant à l'unité et à chacun des nombres suivants le nombre qui vient aprés, comme il a été montré que cela doit se faire pour les nombres triangles, mais en prenant touiours les nombres séparés par un intervalle d' une unité, c' est-à-dire les nombres impairs. En effet, le premier nombre, qui est 1, est le premier carré virtuel, le second, qui est 1+3, est le premier carré effectif; le troisième, qui est 1+3+5, est le second carré effectif; le quatriéme, qui est 1+3+5+7, est le troisième carré effectif; le suivant se forme en ajoutant 9 aux nombres précédents; le suivant en ajoutant 11, est toujours de même. Il arrive également pour ces nombres que le côté de chacun d' eux est d' autant d' unités qu'il y a de nombres ajoutés ensemble pour former chacun de ces nombres.

Chap. 20. En outre, tout carré devient un *rectangle oblong*, si on l' augment de son côté, et de même si on le diminue de ce même côté. Ainsi l' on conçoit que ce *même* carré devient *autre* soit en plus, soit en moins, si le changement s' accomplit par addition ou par soustraction; de même que les deux espèces de l'*inégal*, savoir le *plus grande* et le *moindre*, prennent naissance par une addition ou par une soustraction survenant à ce qui était *égal*. Ceci suffit pour prouver que ces deux espèces participent de l'*identité* et de la *diversité*, savoir, de la *diversité*, d'une manière indéfinie, et de l'identité, d' une manière définie; que l'*unité* et la *dyade* participent originairement à l'*identité* et à la *diversité*, et que secondairement l'*impair* participe à l'*identité*, parcequ' il est de la même nature que l'*unité*, et le *pair* à la *diversité*, parcequ'il est de la même nature que la *dyade*. Il est encore plus évident que le *carré* a de l'affinité avec l'*identité*, parcequ'il est formé de l'*impair* par composition, et que le *rectangle* oblong a de l'affinité avec la *diversité*, parcequ'il est formé du *pair*.

En effet, par une amitié réciproque, ces deux espèces, dans les deux séries, se communiquent l'une à l'autre séparément les mêmes différences, sans se communiquer les mêmes rapports par quotient, ou bien les mêmes rapports par quotient sans les mêmes différences. Car le rapport par différence entre 4 et 2 donne entre ces deux nombres le rapport par quotient 2, et le même rapport par difference entre 4 et 6 donne entre ces deux nombres le rapport par quotient $1 \frac{1}{2}$, et de meme le rapporte per différence entre 9 et 6 donne entre ces deux nombres le rapport par quozient $1 \frac{1}{2}$, tandis que ce même rapport par difference entre 9 et 12 donne le rapport par quotient $1 \frac{1}{3}$ entre ces deux nombres, et toujours de même. Ainsi ce qui est le même en *qualité* est autre en *quantité* ; et ce qui est le même en *quantité* est autre en *qualité*. D' un autre côté, il arrivera nécessairement que dans toutes le positions la même difference de deux termes sera dite toujours, avec difference d'une unité, $\frac{1}{2}$ de l' un de ces termes et $\frac{1}{3}$ de l'autre, ou bien $\frac{1}{3}$ de l'un et $\frac{1}{4}$ de l'autrè, ou bien encore $\frac{1}{4}$ de l'un et $\frac{1}{5}$ de l'autre, et ainsi de suite. Mais voici ce qui confirmera le mieux que l'*impair* est par excellence la cause de l'*identité* et que le *pair* ne l'est jamais: il faudra montrer que cette vérité se manifeste dans toute progression par quotient, par exemple, dans la progression des doubles, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, et dans la progression des triples, 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, et jusqu'ou vous voudrez; vous trouverez nécessairement que tous les nombres de rang impair seront carrés et absolument aucun autre, et qu'il n'y aura pas un seul carré dans les rangs pairs. En outre, tous les nombres formés d'un même nombre pris trois fois

comme facteur, c'est-à-dire les cubes, qui, ayant trois dimensions, semblent participer plus encore à l'*identité*, 1, 8, 27, 64, 125, 216, et ainsi de suite, sont l'oeuvre des *impairs* et non l'oeuvre des *pairs*, comme on va le voir par une méthode simple et sans complication. En effet, les nombres impairs depuis l'unité jusq'à l'infini étant exposés en rang, faites l'observation suivante : le premier forme le cube *virtuel;* les deux suivants ajoutés ensemble forment le second cube; les trois suivants forment le 3ᵉ; les quatre d'après, le 4ᵉ; les cinq a la suite, le 5ᵉ; les 6 à la suite, le 6ᵉ, et ainsi à l'infini.

REMARQUES SUR LE CHAPITRE 9.

Le chapitre 9 du second livre de l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque, le premier des deux chapitres dont on vient de lire la traduction, se rattache aux chapitres 7, 8, 9, 10, 11 et 12 de ce même livre, et ces six chapitres renferment une théorie sur laquelle quelques observations sont nécessaires.

Il y a entre l'arithmétique et la géométrie une analogie réelle, dont l'etude conduit à des applications utiles. Les lignes étant exprimées par des nombres dits *linéaires*, dont chaque unité représente l'unité de longueur, les surfaces sont exprimées par des nombres dits *rectangles*, qui sont le produit de deux nombres linéaires inégaux, ou par des nombres *carrés*, qui sont le produit de deux nombres linéaires égaux entre eux, c'est-à-dire d'un nombre linéaire pris deux fois comme facteur. Les volumnes sont exprimés par des nombres *parallélipipèdes rectangles*, qui sont le produit de trois nombres linéaires quelconques, ou par des nombres *cubiques*, qui sont le produit de trois nombres linéaires égaux entre eux, c'est-à-dire d'un même nombre linéaire pris trois fois comme facteur. Cette théorie utile a été donné par Euclide et par tous les géomètres.

Mais les philosophes grecs qui ont voulu spéculer sur les mathématiques se sont efforcés de pousser plus loin l'assimilation entre l'arithmétique et la géométrie. Cet effort a produit, entre autres théories plus curieuses qu'utiles, celle des *nombres polygones*, sur laquelle les textes principaux sont: 1.° Nicomaque de Gérase, *Introduction arithmétique en deux livres*, livre 2, chap. 7, 8, 9, 10, 11 et 12 (p. 117—125 de l'édition de M. Ast); 2.° Jamblique, *Commentaire sur l'Introduction arithmétique de Nicomaque* (pag. 82—87 de l'édition de Tennulius, Arnheim, 1668, in 4°); 3.° Théon de Smyrne, *Arithmétique*, chap. 18, 19, 20, 23, 25, 26, 27, 28 (p. 47—56, 58—64 de l'édition complète donnée par Boulliau, Paris, 1644, in 4.°, ou p. 57, 59—61, 63—65 de l'édition des 32 premiers chapitres donnée par M. Van Gelder, Leyde, 1827, in 8.°). Nicomaque de Gérase est un philosophe pytagoricien du second siécle de notre ére. Théon de Smyrne est un philosophe platonicien du commencement de ce même siécle; Jamblique est un philosophe néoplatonicien du quatrième siècle.

Je dis que la théorie de ces philosophes sur les nombres *poligones* est plus curieuse qu'utile, et qu'il en est de même de leur théorie sur les nombres *polyèdres*. J'excepte pourtant la partie qui concerne les nombres *rectangles* et *carrés*, et les nombres *parallélipipèdes rectangles* et *cubiques*. En effet, les nombres *rectangles et carrés* expriment la mesure des surfaces, et les nombres *parallélipipédes rectangles* et *cubiques* expriment la mesure des solides. Au contraire, les nombres *triangles*, *pentagones*, *hexagones*, etc., de même que les nombres *tétraédres*, *pentaèdres*, *hexaèdres*, etc., n'expriment rien qu'une disposition imaginaire des unités dans l'espace. Par exemple, le nombre triangle dont le côté est 2, c'est-à-dire le nombre 3, n'exprime pas l'aire du triangle régulier dont le côté est 2; le nombre triangle dont le côté est 3, c'est-à-dire le nombre 6, n'exprime pas l'aire du triangle

régulier dont le côté est 3, etc. De même le nombre pentagone dont le côté est 2, c'est-à-dire le nombre 5, n'exprime pas l' aire du pentagone régulier, dont le côté est 2; le nombre pentagone dont le côté est 3, c'est-à-dire le nombre 12, n'exprime pas l' aire du pentagone régulier dont le côté est 3, etc. Il en est de même pour les autres nombres polygones, à l'exception seulement des nombres rectangles et carrés, qui expriment les aires des figures correspondantes.

La loi de formation des nombres triangles, carrés, pentagones, etc., telle qu'elle est indiquée par Nicomaque, aussi bien que par Jamblique et par Théon de Smyrne, se résume dans les tableaux suivants;

NOMBRES TRIANGLES

Série naturelle des nombres	1	2	3	4	5	6	7	......
Série des nombres triangles	1	3	6	10	15	21	28	......
Série des diff. ou nombres composants	1	2	3	4	5	6	7	......

NOMBRES CARRÉS

Série naturelle des nombres	1	2	3	4	5	6	7	......
Série des nombres carrés	1	4	9	16	25	36	49	......
Série des diff. ou nombres composants	1	3	5	7	9	11	13	......

NOMBRES PENTAGONES

Série naturellle des nombres	1	2	3	4	5	6	7	......
Série des nombres pentagones	1	5	12	22	35	51	70	......
Série des diff. ou nombres composants	1	4	7	10	13	16	19	......

Les nombres hexagones, heptagones, octogones, etc., donneraient lieu à des tableaux analogues. Ces tableaux s'expliquent par les observations suivantes:

1.° Chaque nombre de la série naturelle est le *côté* du nombre polygone correspondant.

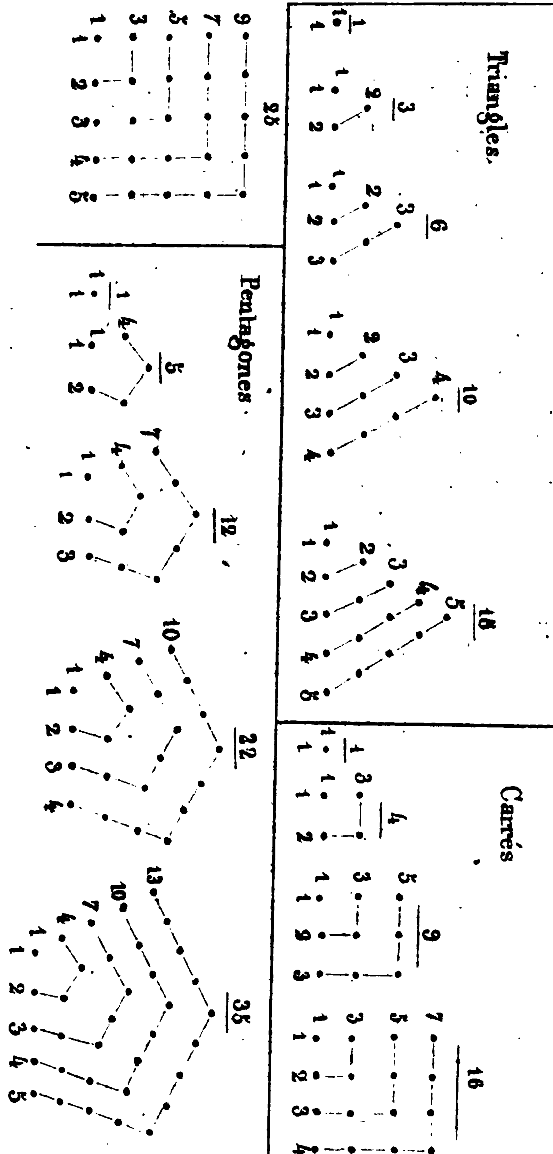
2.° Chaque série de nombres polygones commence par l'unité, qui, suivant une expression empruntée à la *Métaphysique* d'Aristote, n'est un nombre triangle, carré, pentagone, etc., qu'*en puissance* (δυνάμει), c'est-à-dire *virtuellement*, tandisque les nombres suivants de chacune de ces séries sont triangles, carrés, pentagones, etc., *en acte* (ἐνεργείᾳ) c' est-à-dire *effectivement*. Chaque nombre polygone d' une même série contient le nombre polygone précedent, plus la différence, et par conséquent chacun de ces nombres est la somme de toutes le différences précédentes.

3.° Ainsi les différences sont en même temps les nombres composants des nombres polygones. Les nombres composants ou différences forment des séries dont le premier terme est toujours l'unité, et dans lesquelles chacun des nombres suivants est égal au précédent $+ 1$ pour la formation des nombres triangles, au précédent $+ 2$ pour la formation des nombres carrés, au précédent $+ 3$ pour la formation des nombres pentagones, au précédent $+ m - 2$ pour la formation des nombres qui ont un nombre m de côtés.

4.° Le côté de chaque nombre polygone a autant d'unités qu'il y a de nombres compôsants compris dans le nombre composants compris dans le nombre polygone correspondant.

Les noms de *triangles*, de *carrés*, de *pentagones*, etc., donnés à ces nombres, s' expliquent par des figures géométriques, où les unités, représentées par des points, sont distribuées régulièrement, de manière à montrer comment chaque nombre polygone d'une série comprend le nombre polygone précédent plus la différence, et est la somme de toutes les différences ou nombres composants qui précèdent. Les figures manquent ici dans les manuscrits et dans les éditions de l'*Introduction Arithmétique* de Nicomaque; mais on les trouve dans l'édition du *Commentaire* de Jamblique

et dans les deux éditions de l'*Aritmétique* de Théon de Smyrne.



Je les reproduis ici pour les triangles, les carrés et les

pentagones, en joignant ensemble par de légers traits les points appartenant à chacun des nombres composants, afin de mettre en évidence ces nombres, qui, en s'ajoutant, forment chaque nombre polygone. Les nombres de la série naturelle sont écrits sous le côté inferieur; les nombres composants, ou différences, sont écrits le long du côté adjacent vers la gauche; les nombres polygones sont écrits au-dessus de chaque figure:

On aurait des figures analogues pour les hexagones, heptagones, etc.

REMARQUES SUR LE CHAPITRE 20.

L'auteur a donné plus haut (II, 17, p. 129 de l'édition d'Ast) la définition de ce qu'il entend par *rectangle oblong* (ἑτερομήκης): c'est un rectangle dont les deux côtés adjacents diffèrent d'*une unité seulement*, comme: $1 \times 2 = 2$, $2 \times 3 = 6$, $3 \times 4 = 12$, $4 \times 5 = 20$, $5 \times 6 = 30$, $6 \times 7 = 42$, $7 \times 8 = 56$, etc. Il vient de donner dans le chapitre précédent (II, 19, p. 134) un autre mode de formation de ces *rectangles oblongs*, par l'addition successive des *nombres composants* ou *différences*. Nous avons vu plus haut (chap. 9, Remarques) que les nombres composants ou différences des *carrés* sont les nombres de la série des nombres *impairs*. Le nombres composants ou différences des *rectangles oblongs* sont les nombres de la série des nombres *pairs*.

Série des rectangles oblongs	2	6	12	20	30	42	56	72	...	Tableau A
Série des différences	2	4	6	8	10	12	14	16	...	

Ici, au commencement du chapitre 20, Nicomaque donne deux moyens d'obtenir la série des rectangles oblongs à l'aide de la série des carrés. Le premier procédé consiste à ajouter à chaque carré son côté; le second à retrancher de chaque carré le côté de ce même carré. En ajoutant,

on a: $1 + 1 = 2$; $4 + 2 = 6$; $9 + 3 = 12$, etc. Ce qui donne le tableau suivant:

Série des carrés	1	4	9	16	25	36	49	64	...	Tableau B
Série des rectangles oblongs	2	6	12	20	30	42	56	72	...	

En retranchant, on a: $1 - 1 = 0$; $4 - 2 = 2$; $9 - 3 = 6$; $16 - 4 = 12$, etc. Ce qui donne le tableau suivant:

Série des carrés ...	1	4	9	16	25	36	49	64	81	...	Tableau C
Série des rectangles oblongs	0	2	6	12	20	30	42	56	72	...	

Les considerations que l'auteur présente ensuite sur le rôle de l'*identité* et de la *diversité* dans la série des carrés et dans celle des rectangles oblongs, sur l'unité considérée comme principe d'*identité*, et sur la *dyade* (nombre 2, facteur de tous les nombres pairs) considérée comme principe de *diversité*, ces considérations, dis-je, appartiennent à la philosophie de Platon, qui suivait en cela les traditions pythagoriciennes. En effet, sur les *idées* de *même* (ταὐτόν) et d'autre (θάτερον), d'*identité* (ταυτότης) et de *diversité* (ἑτερότης), et sur la participation de tous les êtres à ces idées, on peut voir divers textes de Platon, par exemple le *Sophiste* (p. 250—260, Paris, 1578, in fol.) et le Timée (p. 25—27, même éd.). Les platoniciens donnaient à la multiplicité le nom de *dyade indéfinie* (δυὰς ἀόριστος). Il est donc naturel que la *dyade* et ses multiples, c'est-à-dire les nombres pairs soient considérés par le philosophe platonicien et pytagoricien Nicomaque comme participant sourtout au principe de la *multplicité* et de la *diversité*, tandisque l'unité et les nombres impairs participent sourtout, suivant lui, au principe de l'*unité* et de l'*identité*. Dans le chapitre 9 et dans nos Remarques sur ce chapitre, nous avons vu que les nombres composants des carrés sont les nombres impairs, 1, 3, 5, 7, etc. Donc, suivant notrre auteur, le carré a de l'affinité

avec l'*identité*. Nous venons de voir que les nombres composants des rectangles sont les nombres pairs, 2, 4, 6, 8, etc. Donc, suivant lui, les rectangles ont de l'affinité avec la *diversité*.

L'auteur ajoute que, si l'on compare (voyez ci-dessus le *Tableau* C) les nombres de la série des carrés avec ceux de la série des réctangles, on trouve que, lorsq'un nombre d'une de ces deux séries est *moyen proportionnel par différence* entre deux nombres de l'autre série, il n'est pas *moyen proportionnel par quotient* entre ces deux mêmes nombres et que lorsqu'il est moyen proportionnel entre eux *par quotient*, il ne l'est pas *par différence*; mais il l'est toujours de l'une ou de l'autre de ces deux manières. En effet, le carré 4 est moyen proportionnel *par différence* entre les rectangles 2 et 6; le carré 9 est moyen proportionnel *par différence* entre les rectangles 6 et 12; le carré 16 est moyen proportionnel *par différence* entre les rectangles 12 et 20; etc. D'un autre côté le rectangle 2 est moyen proportionnel *par quotient* entre les carrés 1 et 4; le rectangle 6 est moyen proportionnel *par quotient* entre les carrés 4 et 9; le rectangle 12 est moyen proportionnel *par quotient* entre les carrés 9 et 16, etc. Remarquons que l'auteur nomme rapport de *qualité* le rapport *par quotient*, et rapport de *quantité* le rapport *par différence*.

Il ajoute qu'une même différence entre un carré et un rectangle et entre ce même carré et un autre rectangle sera une fraction différente du plus grand des deux nombres, de telle sorte que, le numérateur de chaque fraction étant 1, la différence des deux dénominateurs soit toujours d'une unité. En effet (voyez le *Tableau* C), $4-2=2$, et $6-4=2$; mais $=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}$ De même $9-6=3$, et $12-9=3$; mais $3=\frac{9}{3}=\frac{12}{4}$ De même encore $16-12=4$, et $20-16=4$;

mais $4 = \frac{16}{4} = \frac{20}{5}$, et ainsi de suite.

L'auteur remarque ensuite qu'étant donnée la progression dont la *raison par quotient* est 2, et la progression dont la raison *par quotient* est 3, on peut voir que dans chacune de ces deux progressions tous les nombres de rang impair et ces nombres seuls seront des carrés: ce qui prouve, suivant lui, que le carré a de l'affinité avec l'*impair*, et par conséquent avec l'*unité* et l'*identité*. Cette même affinité existe encore mieux, suivant lui, pour les cubes; car, suivant sa remarque, le premier nombre de la série des nombres *impairs* est 1, premier cube *virtuel*; la somme des deux nombres impairs suivants (3+5) donne le second cube 8; la somme des trois nombres impairs suivants (7+9+11) donne le troisième cube 27; la somme des quatre nombres impairs suivants (13 + 15 + 17 + 19) donne le quatrième cube 64, et ainsi de suite.

Je pense que ces remarques sur les chapitres 9 et 20 de l'*Arithmétique* de Nicomaque suffisent pour en expliquer le sens. Ces remarques étaient nécessaires, parceque ces deux chapîtres touchent à des théories antiques, tout-à-fait étrangères à l'arithmétique moderne.

Rennes, le 12 janvier 1856.

H. Martin.

SUPERFICIE DEI CONI E CILINDRI.

MEMORIA

DEL PROF. MATTIA AZZARELLI

CAPITANO D'ARTIGLIERIA

---

1. Il Cardinali in una sua memoria stampata in Livorno nell'anno 1809 sulla teorica delle funzioni ellittiche, come applicazione di questi trascendenti indicava il modo per assegnare le superficie dei coni: il Legendre nel suo trattato delle stesse funzioni ellittiche pagina 329 e seguenti del tomo primo si occupava dello stesso problema ben più distesamente: questo argomento veniva pure trattato dal Plana nel giornale di Crelle tomo 36; ed in ultimo il dott.r J. Dienger in questi Annali alla pagina 119 del t. II.° assegnava la superficie del cono obliquo a base ellittica.

Profittando dei lavori di questi chiar. geometri, nel trattare tale argomento, principieremo dallo stabilire le formole generali per la quadratura di qualunque cono, e per alcune altre ricerche che ne possono dipendere: di esse formole faremo quindi l'applicazione ad alcuni coni: ad assegneremo ancora le formole generali per la determinazione delle superficie dei cono-cunei, e di tutti i cilindri.

Determinato il fine di quanto siamo per dire, sia il seguente.

2. Problema. *Data la lunghezza dell'asse di un cono qualunque, e la linea direttrice, assegnare una formola pel calcolo della sua superficie.*

Sia C l'origine di due assi tra loro perpendicolari fig. 1.ª A questi venga riferita una curva che diremo direttrice:

preso su di essa un punto qualunque M siano

$$CP = x \;, \quad PM = y$$

le coordinate ed

$$y = f(x)$$

l'equazione sua.

Di un punto qualunque S nello spazio, sia SR l'altezza sopra il piano delle coordinate: immaginando ora che una retta passando per S percorra la curva AMB avremo un cono del quale si dimanda la superficie. Per maggiore semplicità riterremo che il centro di esso sia in C, onde CS ne rappresenti l'asse dato.

Si concepiscano due rette generatrici infinitamente prossime SM, Sm; la superficie SMm sarà l'elemento della superficie del cono. Onde assegnare il valore di essa immaginiamo condotta al punto M la tangente TM, e per questa e la generatrice SM passi un piano, che sarà quello tangente il cono: se ora per l'altezza SR del cono si immagina condotto un piano normale alla traccia o tangente TM, la intersezione SN col piano tangente rappresenterà l'altezza della superficie elementare, la quale designata per dS avremo

$$dS = \frac{Mm \times SN}{2} \,.$$

Le coordinate del punto R sono, usando le denominazioni degli angoli notati in figura

$$CI = l\cos\theta\cos\beta \;, \quad IR = l\cos\theta\operatorname{sen}\beta \;,$$

perchè

$$CR = l\cos\theta \;.$$

L'altezza del cono in funzione della lunghezza dell'asse sarà

$$SR = l\operatorname{sen}\theta \;.$$

3. Per determinare la SN, e la lunghezza di una generatrice qualunque SM, osserveremo essere necessario cono-

scere RN, ed MR. La prima di queste rette è la lunghezza della perpendicolare calata da un punto dato, sopra la tangente alla direttrice, cioè sulla retta di equazione

$$Y = \frac{dy}{dx} X + \frac{ydx - xdy}{dx},$$

onde essendo generalmente

$$RN = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{(1 + a^2)}},$$

e nel caso presente avendosi

$$y' = l\cos\theta \operatorname{sen}\beta \,, \quad x' = -l\cos\theta\cos\beta$$

$$a = \frac{dy}{dx}, \quad b = \frac{ydx - xdy}{dx}$$

sarà sostituendo e riducendo

$$RN = \frac{xdy - ydx + ldy\cos\theta\cos\beta + ldx\cos\theta\operatorname{sen}\beta}{ds},$$

La MR è una retta la quale passa per due punti di coordinate

$$x, y; \; -l\cos\theta\cos\beta \,, \quad l\cos\theta\operatorname{sen}\beta \,,$$

onde

$$\overline{MR}^2 = (x + l\cos\theta\cos\beta)^2 + (y - l\cos\theta\operatorname{sen}\beta)^2$$

ovvero

$$\overline{MR}^2 = x^2 + y^2 + l^2\cos^2\theta + 2lx\cos\theta\cos\beta - 2ly\cos\theta\operatorname{sen}\beta \,,$$

e quindi per le due cercate rette avremo

$$SN = \frac{1}{ds}$$

$$\times \sqrt{[(xdy - ydx + ldy\cos\theta\cos\beta + ldx\cos\theta\operatorname{sen}\beta)^2 + l^2ds^2\operatorname{sen}^2\theta)]}$$

$$MS = \sqrt{[x^2 + y^2 + l^2 + 2lx\cos\theta\cos\beta - 2ly\cos\theta\operatorname{sen}\beta]} \,,$$

dopo di che abbiamo

$$(1)\left\{\begin{array}{l} dS = \frac{1}{2} \\ \times\sqrt{[(xdy - ydx + ldy\cos\theta\cos\beta + ldx\cos\theta\,\mathrm{sen}\beta)^2 + l^2 ds^2 \mathrm{sen}^2\theta]} \end{array}\right.$$

pel valore dell'elemento di superficie di qualunque cono, e quindi dalla integrazione di questa entro dati limiti ne risulterà la superficie finita.

Se vorremo considerare il caso dei coni i cui assi siano obliqui soltanto rispetto l'asse delle x, che, seguendo Legendre, diremo coni ad una sola obliquità, chiamando gli altri a doppia obliquità, dovremo porre $\beta = 0$, se poi vorremo i coni obliqui rispetto l'asse y faremo $\beta = \frac{\pi}{2}$ con che avremo

$$(2)\quad dS = \tfrac{1}{2}\sqrt{[(xdy - ydx + ldy\cos\theta)^2 + l^2 ds^2 \mathrm{sen}^2\theta]}$$

$$(3)\quad dS = \tfrac{1}{2}\sqrt{[(xdy - ydx + ldx\cos\theta)^2 + l^2 ds^2 \mathrm{sen}^2\theta]}\,.$$

Se poi vorremo considerare i coni retti sarà ancora

$$\theta = 0$$

e così

$$(4)\qquad dS = \tfrac{1}{2}\sqrt{[(xdy - ydx)^2 + l^2 ds^2]}$$

4. Se ora si voglia la formola generale data in funzione delle coordinate polari r, ω avvertiremo essere

$$x = r\cos\omega\,,\quad y = r\,\mathrm{sen}\omega\,,$$

e perchè

$$dx = dr\cos\omega - rd\omega\,\mathrm{sen}\omega$$

$$dy = dr\,\mathrm{sen}\omega + rd\omega\cos\omega$$

troveremo

$$xdy - ydx = r^2 d\omega$$

e quindi sostituendo e riducendo sarà

$$(5)\left\{\begin{array}{l} dS = \frac{1}{2} \\ \times\sqrt{[(r^2 d\omega + l\cos\theta(dr\,\mathrm{sen}(\beta+\omega) + rd\omega\cos(\beta+\omega))^2} \\ \qquad + l^2(r^2 d\omega^2 + dr^2)\mathrm{sen}^2\theta] \end{array}\right.$$

pei coni a doppia obliquità, e per quelli ad una sola obliquità, essendo $\beta = 0$, sarà

$$(6)\left\{\begin{array}{l} dS = \frac{1}{2} \\ \times\sqrt{[(r^2d\omega + l\cos\theta(dr\operatorname{sen}\omega + rd\omega\cos\omega))^2 + l^2(r^2d\omega^2 + dr^2)\operatorname{sen}^2\theta]}, \end{array}\right.$$

e per $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$(7)\left\{\begin{array}{l} dS = \frac{1}{2} \\ \times\sqrt{[(r^2d\omega + l\cos\theta(dr\cos\omega - rd\omega\operatorname{sen}\omega))^2 + l^2(r^2d\omega^2 + dr^2)\operatorname{sen}^2\theta]} \end{array}\right.$$

e finalmente per $\theta = \frac{\pi}{2}$ avremo

$$(8) \quad dS = \tfrac{1}{2}\sqrt{[r^4d\omega^2 + dl^2(r^2d\omega^2 + dr^2)]}$$

5. La formola generale (1) può determinarsi ancora in modo forse più semplice, col prendere per l'area elementare quella del triangolo SMr, trascurando così una quantità infinitesima del second'ordine.

Abbiamo di fatti

$$SMr = \frac{Mr \times SM}{2}$$

ora per calcolare quest'area indipendentemente dall'angolo MSr, avvertiremo essere

$$\overline{Mr}^2 = \sqrt{(\overline{Mm}^2 - \overline{mr}^2)}$$

ove

$$mr = d.SM\ ;$$

onde

$$SMr = \tfrac{1}{2} \times SM \times \sqrt{(ds^2 - (d.SM)^2)}$$

Ma essendo

$$\overline{SM}^2 = x^2 + y^2 + l^2 + 2lx\cos\theta\cos\beta - 2ly\cos\theta\operatorname{sen}\beta$$

da cui

$$d.SM = \frac{xdx + ydy + ldx\cos\theta\cos\beta - ldy\cos\theta\,\mathrm{sen}\beta}{\sqrt{[x^2 + y^2 + l^2 + 2lx\cos\theta\cos\beta - 2ly\cos\theta\,\mathrm{sen}\beta]}}$$

e quindi

$$dS = \tfrac{1}{2}\sqrt{[x^2 + y^2 + l^2 + 2lx\cos\theta\cos\beta - 2ly\cos\theta\,\mathrm{sen}\beta]}$$

$$\times\sqrt{\left[ds^2 - \frac{(xdx+ydy+ldx\cos\theta\cos\beta-ldy\cos\theta\,\mathrm{sen}\beta)^2}{x^2+y^2+l^2+2lx\cos\theta\cos\beta-2ly\cos\theta\,\mathrm{sen}\beta}\right]}$$

la quale ridotta riproduce la (1).

6. Il secondo metodo impiegato per la determinazione dell'area elementare ci conduce a stabilire una formola pel calcolo di un angolo piano eguale a quello che risulta al vertice del cono lorquando si spiani la sua superficie.

Considerando l'area SMr quale settore di raggio SM$=k$ e di angolo $d\alpha$ abbiamo

$$dS = \frac{k^2 d\alpha}{2}$$

dalla quale, sostituito per k il suo valore in funzione delle coordinate rettilinee, deduciamo

$$(9)\qquad d\alpha = \frac{2dS}{x^2+y^2+l^2+2lx\cos\theta\cos\beta-2ly\cos\theta\,\mathrm{sen}\beta}$$

ed in funzione delle coordinate polari

$$(10)\quad d\alpha = \frac{2dS}{r^2+l^2+2lr\cos\omega\cos\theta\cos\beta-2lr\,\mathrm{sen}\omega\cos\theta\,\mathrm{sen}\beta}$$

le quali pei coni ad una sola obliquità, si riducono a

$$(11)\qquad d\alpha = \frac{2dS}{x^2+y^2+l^2+2lx\cos\theta}$$

$$(12)\qquad d\alpha = \frac{2dS}{r^2+l^2+2lr\cos\omega\cos\theta}$$

per $\beta = 0$: ed a

(13) $$d\alpha = \frac{2dS}{x^2 + y^2 + l^2 - 2ly\cos\theta}$$

(14) $$d\alpha = \frac{2dS}{r^2 + l^2 - 2lr\,\text{sen}\,\omega\cos\theta}$$

per $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Quando si supponesse che i coni fossero retti, essendo $\theta = \frac{\pi}{2}$, avremo

(15) $$d\alpha = \frac{2dS}{x^2 + y^2 + l^2},$$

(16) $$d\alpha = \frac{2dS}{r^2 + l^2},$$

7. Le formole stabilite servono ancora per assegnare la curva che termina la superficie del cono lorchè venga spianata. Poichè designando per ρ la lunghezza di una generatrice che dal vertice del cono va al punto x, y della direttrice abbiamo

(17) $$\rho^2 = x^2 + y^2 + l^2 + 2lx\cos\theta\cos\beta - 2ly\cos\theta\,\text{sen}\,\beta$$

(18) $$y = f(x)$$

(19) $$d\alpha = \frac{\sqrt{[(xdy - ydx + ldy\cos\theta\cos\beta + ldx\cos\theta\,\text{sen}\,\beta)^2 + l^2ds^2\,\text{sen}^2\theta]}}{\rho^2}$$

L' integrale indefinito dell' ultima equazione sarà espresso per la sola variabile x, e quindi la eliminazione della y fra le (17), (18) condurrà ad una equazione fra ρ ed x dalla quale ricavato x in funzione di ρ e sostituito nella (19) ci darà la curva richiesta.

Può giungersi ancora ad una equazione differenziale per la curva, e ciò col dare primieramente la (19) in funzione soltanto della x o della y, e quindi dalle (17), (18) ricavare x od y in ρ per sostituirlo nella (19).

8. Conoscendosi la lunghezza di una generatrice qualunque possiamo assegnare una formola per calcolare il valore dell'angolo che tale generatrice in qualunque sua posizione forma coll'asse del cono. Rappresentato per μ tale angolo, dal triangolo MSC avremo immediatamente

$$\cos\mu = \frac{\overline{MS}^2 + \overline{CS}^2 - \overline{MC}^2}{2SM \times SC}$$

Sostituendo i valori dei lati in funzione delle quantità variabili e dei parametri particolari al problema avremo per qualunque cono

$$(20)\quad \cos\mu = \frac{l + x\cos\theta\cos\beta - y\cos\theta\,\mathrm{sen}\beta}{\sqrt{(x^2 + y^2 + l^2 + 2lx\cos\theta\cos\beta - 2ly\cos\theta\,\mathrm{sen}\beta)}}$$

Se il cono avrà una sola obliquità avremo per $\beta = 0$

$$(21)\quad \cos\mu = \frac{l + x\cos\theta}{\sqrt{(x^2 + y^2 + l^2 + 2lx\cos\theta)}},$$

per $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$(22)\quad \cos\mu = \frac{l - y\cos\theta}{\sqrt{(x^2 + y^2 + l^2 - 2ly\cos\theta}}$$

Se poi i coni saranno retti, essendo

$$\theta = \frac{\pi}{2}\ .$$

sarà

$$(23)\quad \cos\mu = \frac{l}{\sqrt{(x^2 + y^2 + l^2)}}\ .$$

9. Può avvenire alcune volte che si abbiano coni obliqui i quali siano di loro natura circolari, cioè tali nei quali esista nell'interno di loro superficie una retta che passando pel vertice formi un angolo costante con una generatrice qualunque. In tali casi deve pertanto esistere nel piano base del cono un punto il quale congiunto col vertice ne risulta una retta che goda di tale proprietà.

Sia O si fatto punto, e le sue coordinate siano

$$CQ = -x_0 \,, \quad QO = y_0 :$$

la retta OS, asse del cono circolare, passa pel punto O e pel vertice S determinato dalle coordinate

$$GI = -l\cos\theta\cos\beta, \ IR = l\cos\theta\mathrm{sen}\beta, \ RS = l\mathrm{sen}\theta$$

dunque sarà

$$\overline{OS}^2 = x^2_0 + y^2_0 + l^2 - 2lx_0\cos\theta\cos\beta - 2ly_0\cos\theta\mathrm{sen}\beta$$

ed ancora

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + x^2_0 + y^2_0 + 2x_0x - 2y_0y$$

Essendo peró

$$\cos\mu_1 = \frac{\overline{MS}^2 + \overline{OS}^2 - \overline{OM}^2}{2MS \times OS}$$

avremo

$$(24) \quad \cos\mu_1 = \frac{l^2 + l\cos\theta\cos\beta(x - x_0) - l\cos\theta\mathrm{sen}\beta(y + y_0) + y_0y - x_0x}{\sqrt{[(x^2 + y^2 + l^2 - 2ll_1\cos\theta)(x^2_0 + y^2_0 + l^2 - 2ll_0\cos\theta)]}}$$

ove

$$l_1 = x\cos\beta - y\mathrm{sen}\beta$$

$$l_0 = x_0\cos\beta - y_0\mathrm{sen}\beta \ .$$

Se si parlerà di coni ad una sola obliquità avremo per

$$\beta = 0, \quad y_0 = 0$$

$$(25) \quad \cos\mu_1 = \frac{l^2 + l\cos\theta(x - x_0) - xx_0}{\sqrt{[(x^2+y^2+l^2+2lx\cos\theta)(x_0^2+l^2-2lx_0\cos\theta)]}}$$

e per

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \quad x_0 = 0$$

$$(26) \quad \cos\mu_1 = \frac{l^2 - l\cos\theta(y + y_0) + yy_0}{\sqrt{[(x^2+y^2+l^2-2ly\cos\theta)(y_0^2+l^2-2ly_0\cos\theta)]}}$$

Se in fine si volessero i coni retti, pei quali

$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

sarà

$$(27) \qquad \cos\mu_1 = \frac{l^2 + yy_0 - xx_0}{\sqrt{[(x^2+y^2+l^2)(x_0^2+y_0^2+l^2)]}}$$

In tutte le formole che danno il valore di $\cos\mu_1$, dovran determinarsi per x_0, y_0 tali valori da rendere costante l'angolo μ_1, e quindi tale qualunque sua funzione trigonometrica. E lorquando si troveranno assurdi i valori delle coordinate x_0, y_0 il cono corrispondente non sarà di natura circolare.

10. Sia un cono retto a base circolare, onde abbiasi

$$x^2 + y^2 = r^2$$

per equazione alla direttrice.

Perchè abbiamo

$$dy = -\frac{xdx}{y}$$

così troviamo per la (4) dopo semplici riduzioni

$$S = \frac{r\sqrt{(l^2+r^2)}}{2}\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = \frac{\pi r}{2} \cdot \frac{\sqrt{(l^2+r^2)}}{2},$$

il quale valore quadruplicato dà

$$4S = 2\pi r \,.\, \frac{\sqrt{(l^2+r^2)}}{2},$$

come dagli elementi di geometria.

Fatto qui $l = 0$, risulta

$$4S = \pi r^2$$

cioè la superficie del circolo.

11. Per assegnare l'angolo al vertice, lorchè la superficie del cono venga spianata prenderemo la formola a coordinate polari

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega \sqrt{\left[r^4 + l^2\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\omega^2}\right)\right]}}{l^2 + r^2}$$

dalla quale, fatto

$$r = \text{cost.}^e, \quad dr = 0$$

si trae

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{\sqrt{(r^2+l^2)}}\, d\omega = \frac{r}{\sqrt{(r^2+l^2)}} \,.\, \frac{\pi}{2}$$

e per la intera superficie del cono

$$4\alpha = \frac{r}{\sqrt{(r^2+l^2)}} \,.\, 2\pi,$$

il quale valore dell'angolo di raggio uno è minore di quattro retti, come dalla geometria elementare; e restando il medesimo circolo base, esso angolo tanto è più piccolo quanto più lungo divenga l'asse del cono.

12. Per la linea che termina la superficie spianata del cono retto a base circolare abbiamo

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + l^2, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

$$d\alpha = \frac{1}{\rho^2} \sqrt{[(xdy - ydx)^2 + l^2 ds^2]}.$$

Dalle due prime

$$\rho^2 = l^2 + r^2,$$

cioè ρ costante, e quindi

$$d\alpha = \frac{\rho}{r} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$$

il cui integrale indefinito è

$$\alpha = \frac{r}{\rho} \text{Arc.sen}\left(= \frac{x}{r}\right)$$

dalla quale

$$x^2 = r^2 \text{sen}^2 \frac{\alpha\rho}{r}$$

e quindi

$$y^2 = r^2 \cos^2 . \frac{\alpha\rho}{r}$$

onde

$$\rho^2 = l^2 + r^2$$

cioè la curva cercata è un arco di circolo di raggio ρ.

13. Se si vuole l' angolo che una direttrice qualunque forma coll'asse, questo è costante, e per la formola (22) si trova

$$\cos\mu = \frac{l}{\sqrt{(l^2 + r^2)}} .$$

A questo medesimo risultato si perverrebbe per mezzo della formola

$$\cos\mu_1 = \frac{l^2 + yy_0 - xx_0}{\sqrt{[(x^2 + y^2 + l^2)(x^2_0 + y^2_0 + l^2)]}}$$

nella quale si disponesse di x_0, y_0 per modo da rendere costante l'angolo μ_1, il che si ottiene per la condizione

$$x^2_o + y^2_o = 0$$

la quale esige

$$x_o = 0, \; y_o = 0$$

e così torna

$$\cos\mu_1 = \frac{l}{\sqrt{(r^2+l^2)}}.$$

14. Supponiamo ora un cono retto a base ellittica di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

essendo

$$dy = -\frac{b^2xdx}{a^2y}:$$

la (2) dopo alcune riduzioni ci dà

$$dS = \frac{dx}{2a\sqrt{(a^2-x^2)}}\sqrt{[a^4b^2+l^2(a^4-e^2x^2)]}$$

ove fatto

$$e = ac$$

si ha

$$dS = \frac{dx}{2\sqrt{(a^2-x^2)}}\sqrt{(a^2b^2+l^2(a^2-c^2x^2)}.$$

Se qui facciamo

$$x = a\text{sen}\varphi$$

avremo

$$dS = \frac{ad\varphi}{2}\sqrt{(b^2+l^2-c^2l^2\text{sen}^2\varphi)}$$

ovvero

$$dS = \frac{a\sqrt{(b^2+l^2)}}{2} \times d\varphi\sqrt{\left(1-\frac{c^2l^2}{b^2+l^2}\text{sen}^2\varphi\right)}$$

ove è costantemente

$$k^2 = \frac{c^2 l^2}{b^2 + l^2} < 1 \, ,$$

perciò avremo

$$S = \frac{a\sqrt{(b^2+l^2)}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{(1 - k^2 \text{sen}^2\varphi)} = \frac{a\sqrt{(b^2+l^2)}}{2} \, E\left(\frac{\pi}{2}, \, k\right),$$

cioè una funzione ellittica di seconda specie. Se si suppone $a = b$, essendo $c = 0$, si ha

$$S = \frac{\pi a}{2} . \frac{\sqrt{(a^2+l^2)}}{2} ,$$

come altrove: se poi si faccia $l = 0$, si ottiene

$$S = \frac{\pi ab}{2}$$

che è la superficie dell'ellisse.

Con pari facilità si sarebbe assegnata la superficie, quando per l'equazione della ellisse si fossero considerate le due

$$x = a\text{sen}\varphi \, , \quad y = b\cos\varphi$$

per le quali, essendo

$$dx = ad\varphi\cos\varphi \, , \quad dy = - bd\varphi\text{sen}\varphi$$

si sarebbe trovata immediatamente

$$dS = \frac{a\sqrt{(b^2+l^2)}}{2} \, d\varphi \sqrt{\left(1 - \frac{c^2 l^2}{a^2(b^2+l^2)} \, \text{sen}^2\varphi \, .\right)}$$

15. Per conoscere il valore dell'angolo al vertice qualora venisse spianata la superficie del cono retto a base ellittica abbiamo generalmente

$$d\alpha = \frac{\sqrt{[(xdy - ydx)^2 + l^2 dx^2 + l^2 dy^2]}}{x^2 + y^2 + l^2}$$

che nel caso particolare si muta in

$$d\alpha = \frac{dx}{b^2+l^2+c^2x^2}\sqrt{\left(\frac{a^2(b^2+l^2)+l^2c^2x^2}{a^2-x^2}\right)}$$

ove fatto

$$b^2+l^2=h^2, \; x=a\text{sen}\varphi, \quad dx=ad\varphi\cos\varphi$$

sarà

$$\alpha = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\sqrt{(h^2-c^2l^2\text{sen}^2\varphi)}}{h^2+a^2c^2\text{sen}^2\varphi}$$

dalla quale

$$\alpha = ah^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(h^2+a^2c^2\text{sen}^2\varphi)\sqrt{(h^2-c^2l^2\text{sen}^2\varphi)}}$$

$$-\frac{l^2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2c^2\text{sen}^2\varphi . d\varphi}{(h^2+a^2c^2\text{sen}^2\varphi)\sqrt{(h^2-c^2l^2\text{sen}^2\varphi)}}$$

e con semplice trasformazioni troveremo ancora

$$\alpha = \frac{(a^2+l^2)h^2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(h^2+a^2c^2\text{sen}^2\varphi)\sqrt{(h^2-c^2l^2\text{sen}^2\varphi)}}$$

$$-\frac{l^2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(h^2-c^2l^2\text{sen}^2\varphi)}}$$

ed in fine per la quarta parte dell'angolo è

$$\alpha = \frac{a^2+l^2}{ah}\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{cl}{h}, \frac{a^2c^2}{h^2}\right) - \frac{l^2}{ah}\text{F}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{cl}{h}\right)$$

e quando sia $c=0$, torna

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{(a^2+l^2)}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

come si conosceva.

16. Per la curva che termina la superficie del cono che si considera quando la superficie fosse spianata, abbiamo

$$(a) \qquad \rho^2 = x^2 + l^2 + y^2, \quad (b) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(c) \qquad d\alpha = \frac{dx}{b^2 + l^2 + c^2x^2} \sqrt{\left(\frac{a^2(b^2+l^2) - l^2c^2x^2}{a^2 - x^2}\right)}.$$

Eliminando la y fra (a) e (b) ne risulta

$$\rho^2 = c^2x^2 + b^2 + l^2$$

dalla quale

$$cdx = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - (b^2 + l^2))}}$$

che sostituito nella (c) in uno al valore di c^2x^2 otterremo

$$(d) \qquad d\alpha = \frac{d\rho}{\rho} \sqrt{\left(\frac{k^2h^2 - l^2\rho^2}{(\rho^2 - h^2)(k^2 - \rho^2)}\right)}$$

per l'equazione differenziale della curva dimandata, quando si faccia per comodo

$$a^2 + l^2 = k^2, \quad b^2 + l^2 = h^2$$

17. Supponiamo ora un cono obliquo a base circolare; sarà.

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad dy = -\frac{xdx}{y}.$$

La (2) si muta in

$$dS = \frac{dx}{2\sqrt{(\rho^2 - x^2)}} \sqrt{[(\rho^2 + lx\cos\theta)^2 + l^2\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta]},$$

dalla quale, posto

$$\alpha = l^2\cos^2\theta, \quad \beta = l\rho^2\cos\theta, \quad \delta = \rho^2(\rho^2 + l^2\operatorname{sen}^2\theta)$$

dedurremo

$$(a) \qquad dS = \frac{1}{2}\, dx \sqrt{\left(\frac{\alpha x^2 + \beta x + \delta}{\rho^2 - x^2}\right)}$$

che dovremo integrare fra i limiti

$$x = -\rho, \; x = \rho.$$

Si faccia ora

$$x = \frac{my + n}{y + 1},$$

e si sostuisca in (a) ponendo le condizioni perchè manchino le potenze di grado impari della y, onde trarremo

$$dS = \frac{(m-n)dy}{2(y+1)^2} \sqrt{\left[\frac{(\alpha m^2 + 2\beta m + \delta)y^2 + \alpha n^2 + 2\beta n + \delta}{(\rho^2 - m^2)y^2 + \rho^2 - n^2}\right]}$$

ed

$$(b) \left\{ \begin{array}{c} \alpha mn + \beta\,(m + n) + \delta = 0 \\ mn - \rho^2 = 0 \end{array} \right.$$

ossia

$$m + n = -\,\frac{\delta + \alpha\rho^2}{\beta}$$

ed ancora, ponendo per α, β, δ i loro valori

$$(c) \qquad m + n = -\,\frac{\rho^2 + l^2}{l\cos\theta}.$$

Dalla seconda delle (b) e dalla (c) dedurremo

$$m = -\,\frac{\rho^2 + l^2}{2l\cos\theta} + \sqrt{\left[\left(\frac{\rho^2 + l^2}{2l\cos\theta}\right)^2 - \rho^2\right]}$$

$$n = -\,\frac{\rho^2 + l^2}{2l\cos\theta} - \sqrt{\left[\left(\frac{\rho^2 + l^2}{2l\cos\theta}\right)^2 - \rho^2\right]}.$$

nelle quali posta la quantità sotto il vincolo radicale sotto la forma

$$[(\rho + l\cos\theta)^2 + l^2\mathrm{sen}^2\theta]\,[(\rho - l\cos\theta)^2 + l^2\mathrm{sen}^2\theta]$$

si rileva che m ed n sono sempre reali, e quindi è anche tale $m - n$, e di più m ed n sono ambedue positive se $\theta > \frac{\pi}{2}$ ed è $m - n < 0$; sono ambedue negative se $\theta < \frac{\pi}{2}$, ed è $m - n > 0$.

Ora è pure facile riconoscere che lorquando è $\theta < \frac{\pi}{2}$ risulta

$$\rho^2 - m^2 > 0,\ \rho^2 - n^2 < 0;$$

mentre se $\theta > \frac{\pi}{2}$ allora è

$$\rho^2 - m^2 < 0,\ \rho^2 - n^2 > 0$$

poichè

$$\rho^2 - m^2 = 2\sqrt{\left[\left(\frac{\rho^2 + l^2}{2l\cos\theta}\right)^2 - \rho^2\right]}$$

$$\times \left\{ \frac{\rho^2 + l^2}{2l\cos\theta} - \sqrt{\left[\left(\frac{\rho^2 + l^2}{2l\cos\theta}\right)^2 - \rho^2\right]} \right\}$$

e

$$\rho^2 - n^2 = -2\sqrt{\left[\left(\frac{\rho^2 + l^2}{2l\cos\theta}\right)^2 - \rho^2\right]}$$

$$\times \left\{ \frac{\rho^2 + l^2}{2l\cos\theta} + \sqrt{\left[\left(\frac{\rho^2 + l^2}{2l\cos\theta}\right)^2 - \rho^2\right]} \right\}.$$

Le quantità poi

$$\alpha m^2 + 2\beta m + \delta,\ \alpha n^2 + \beta n + \delta$$

sono costantemente positive per qualunque inclinazione dell'asse, mentre poste sotto la forma

$$\alpha\left(m+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\delta-\frac{\beta^2}{\alpha};\ \alpha\left(n+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\delta-\frac{\beta^2}{\alpha}$$

è $\alpha > 0$, ed il termine

$$\delta-\frac{\beta^2}{\alpha}$$

trovasi eguale a

$$\rho^2 l^2 \text{sen}^2\theta$$

che è essenzialmente positivo.

Aggiungeremo ancora che qualora si rappresentino per *d*, *d'* le generatrici corrispondenti all'estremità del diametro del circolo che trovasi sull'asse delle ascisse avremo

$$d^2=(\rho+l\cos\theta)^2+l^2\text{sen}^2\theta$$

$$d'^2=(\rho-l\cos\theta)^2+l^2\text{sen}^2\theta$$

e quindi troveremo

$$m-n=\frac{dd'}{l\cos\theta}.$$

I limiti corrispondenti ad

$$x=-\rho,\ x=\rho$$

saranno

$$y_1=-\frac{\rho+n}{m-\rho},\ y_2=\frac{\rho-n}{m-\rho}$$

i quali per essere

$$n=\frac{\rho^2}{m}$$

diverranno

$$y_1=-\frac{\rho}{m},\ y_2=\frac{\rho}{m}.$$

Prendendo a considerare il solo caso di $\theta < \frac{\pi}{2}$, porremo

$$\alpha m^2 + 2\beta m + \delta = p^2 q^2,\ \alpha n^2 + 2\beta n + \delta = q^2$$

$$\rho^2 - m^2 = r^2 s^2,\ n^2 - \rho^2 = s^2$$

onde avremo

$$(d)\quad S = \frac{qdd'}{2sl\cos\theta} \cdot \frac{p^2y^2+1}{(y+1)^2} \cdot \frac{dy}{R},$$

essendo

$$R = \sqrt{[(p^2y^2+1)(r^2y^2-1)]}.$$

Per ridurre la (d) a dipendere dai trascendenti ellittici avvertiremo che il coefficiente

$$\frac{p^2y^2+1}{(y^2+1)^2}$$

può mettersi sotto la forma

$$p^2 - \frac{2p^2}{y+1} + \frac{1+p^2}{(y+1)^2}$$

onde sostituendo

$$(e)\left\{\begin{aligned} S &= \frac{qdd'}{2sl\cos\theta} \\ &\times \left[p^2 \cdot \frac{dy}{R} - 2p^2 \cdot \frac{dy}{(y+1)R} + (1+p^2)\frac{dy}{(y+1)^2R}\right]. \end{aligned}\right.$$

Se però si assume il composto $\frac{R}{y+1}$, e si differenzia, essendo

$$R = \sqrt{(p^2r^2y^4 + (r^2 - p^2)y^2 - 1)}$$

risulterà

$$d.\,\frac{R}{y+1}=\frac{(y+1)dR-Rdy}{(y+1)^2}$$

ove fatte le opportune sostituzioni e riduzioni abbiamo

$$d.\,\frac{R}{y+1}=\frac{p^2r^2y^4+2p^2r^2y^3+(r^2-p^2)y+1}{(y+1)^2}\cdot\frac{dy}{R},$$

e perchè il coefficiente di $\frac{dy}{R}$ trovasi eguale a

$$p^2r^2(y^2-1)+\frac{2p^2r^2+r^2-p^2}{y+1}+\frac{(1+p^2)(1-r^2)}{(y+1)^2}$$

sarà

$$d.\,\frac{R}{y+1}=p^2r^2(y^2-1)\frac{dy}{R}+(2p^2r^2+r^2-p^2)\frac{dy}{(y+1)R}$$
$$+(1+p^2)(1-r^2)\frac{dy}{(y+1)^2R}$$

da cui

$$(1+p^2)\frac{dy}{(y+1)^2R}=\frac{1}{1-r^2}d.\,\frac{R}{y+1}-\frac{p^2r^2}{1-r^2}(y^2-1)\frac{dy}{R}$$
$$-\frac{2p^2r^2+r^2-p^2}{1-r^2}\cdot\frac{dy}{(y+1)R}$$

che sostituito nella (e) risulta

$$dS=\frac{qdd'}{2sl\cos\theta}$$
$$\times\Big[p^2\frac{dy}{R}-\frac{p^2+r^2}{1-r^2}\,\frac{dy}{(y+1)R}$$
$$-\frac{p^2r^2}{1-r^2}(y^2-1)\,\frac{dy}{R}+\frac{1}{1-r^2}\,d.\,\frac{R}{y+1}\Big].$$

Integrando avremo

$$
(f)\left\{
\begin{aligned}
&S = \text{Cost} + \frac{qdd'}{2sl\cos\theta} \\
&\times \left[p^2\int\frac{dy}{R} - \frac{p^2+r^2}{1-r^2}\int\frac{dy}{(y+1)R}\right. \\
&\left. - \frac{p^2r^2}{1-r^2}\int\frac{(y^2-1)dy}{R} + \frac{1}{1-r^2}\cdot\frac{R}{y+1}\right]
\end{aligned}
\right.
$$

Preparata per si fatto modo la formola che dà la superficie del cono obliquo a base circolare porremo pel caso della presente particolare forma che hanno i fattori del radicale R,

$$y = \frac{1}{r\cos\varphi},\ dy = \frac{d\varphi\,\text{sen}\varphi}{r\cos^2\varphi},$$

avvertendo che i limiti corrispondenti ad

$$y_1 = -\frac{\rho}{m},\ y_2 = \frac{\rho}{m}$$

si avranno da

$$-r\frac{\rho}{m} = \frac{1}{\cos\varphi_0},\ r\frac{\rho}{m} = \frac{1}{\cos\varphi_1};$$

e perchè

$$r^2 = \frac{\rho^2 - m^2}{n^2 - \rho^2} \text{ ed } n = \frac{\rho^2}{m}$$

così essendo

$$r^2 = \frac{m^2}{\rho^2} \text{ e quindi } r = \pm\frac{m}{\rho},$$

prendendo

$$r = -\frac{m}{\rho}$$

troveremo prontamente

$$\varphi_0 = 0\,,\quad \varphi_1 = \pi$$

e quindi ponendo

$$\frac{r^2}{p^2+r^2} = \mu^2$$

avremo

$$\int \frac{dy}{R} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(p^2+r^2-r^2\text{sen}^2\varphi)}} = \frac{\mu}{r}\,F(\varphi,\mu)$$

$$\int \frac{(y^2-1)dy}{R} = \frac{1}{r^2\sqrt{(p^2+r^2)}}\int \frac{d\varphi}{(1-\frac{1}{r}\,\text{sen}^2\varphi)\sqrt{(1-\mu^2\text{sen}\varphi^2)}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(p^2+r^2)}}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\mu^2\text{sen}^2\varphi)}}$$

$$= \frac{\mu}{r^3}\,\Pi\,(\varphi,\mu,-1) - \frac{\mu}{r}\,F(\varphi,\mu)$$

Onde integrare il termine

$$\frac{dy}{(y+1)R}$$

porremo

$$\sqrt{(1-\mu^2\text{sen}^2\varphi)} = \Delta$$

e così troveremo

$$\frac{dy}{(y+1)R} = \frac{d\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(p^2+r^2)}(1+r\cos\varphi)\Delta}$$

ove moltiplicato numeratore e denominatore per $1-r\cos\varphi$ è

$$\frac{dy}{(y+1)R} = \frac{1}{\sqrt{(p^2+r^2)}}\left[\frac{\cos\varphi}{1-r^2\cos^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta} - \frac{r\cos^2\varphi}{1-r^2\cos^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}\right],$$

ma

$$\frac{r\cos^2\varphi}{1-r^2\cos^2\varphi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{1-r^2+r^2\text{sen}^2\varphi} - \frac{1}{r},$$

dunque

$$\frac{dy}{(y+1)R} = \frac{1}{\sqrt{(p^2+r^2)}}\left[\frac{\cos\varphi}{1-r^2\cos^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{(1-r^2+r^2\operatorname{sen}^2\varphi)\Delta}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}\right]$$

e quindi posto $\frac{r^2}{1-r^2}=\lambda^2$

$$\int\frac{dy}{(y+1)R}=\frac{\mu}{r}$$

$$\times\left[\int\frac{\cos\varphi}{1-r^2\cos^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}-\frac{\lambda^2}{r^3}\Pi(\varphi,\mu,\lambda^2)+\frac{1}{r}F(\varphi,\mu)\right].$$

Per integrare finalmente il termine

$$\int\frac{\cos\varphi}{1-r^2\cos^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{1}{r^2}\int\frac{\cos\varphi}{\frac{1-r^2}{r^2}+\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}$$

porremo pel momento

$$\frac{1-r^2}{r^2}=m,\quad \operatorname{sen}\varphi=\frac{1}{\sqrt{(c^2-y_0^2)}}$$

onde facilmente trovasi

$$\frac{1}{r^2}\int\frac{\cos\varphi}{m+\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{1}{r^2\sqrt{(m^2c^2+m)}}\operatorname{Arc.tang}\left(=\frac{m\Delta}{\operatorname{sen}\varphi\sqrt{(m^2c^2+m)}}\right)$$

e se disporremo di c così che sia

$$c^2m^2+m=1$$

sarà

$$c^2=\frac{r^2(2r^2-1)}{(1-r^2)^2}.$$

troveremo

$$\frac{1}{r^2}\int\frac{\cos\varphi}{m+\operatorname{sen}^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{1}{r^2}\,\text{Arc.tang}\left(=\frac{m\Delta}{\operatorname{sen}\varphi}\right)$$

e perciò

$$\int\frac{dy}{(y+1)R}=\frac{\mu}{r}$$

$$\times\left[\frac{1}{r^2}\,\text{Arc.tang}\left(=\frac{m\Delta}{\operatorname{sen}\varphi}\right)-\frac{\lambda^2}{r^3}\,\Pi(\varphi,\mu,\lambda^2)+\frac{1}{r}\,F(\varphi,u)\right].$$

Prendendo ora tutti si fatti integrali fra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$, con avvertire alla relativa proprietà delle funzioni ellittiche, troveremo

$$\int_0^\pi\frac{dy}{R}=\frac{2\mu}{r}\,F\left(\frac{\pi}{2},\mu\right)$$

$$\int_0^\pi\frac{dy(y^2-1)}{R}=\frac{2\mu}{r^3}\,\Pi\left(\frac{\pi}{2},\mu,-1\right)-\frac{2\mu}{r}\,F\left(\frac{\pi}{2},\mu\right)$$

$$\int_0^\pi\frac{dy}{(y+1)R}=-\frac{2\lambda^2\mu}{r^4}\,\Pi\left(\frac{\pi}{2},\mu,\lambda^2\right)+\frac{2\mu}{r^2}\,F\left(\frac{\pi}{2},\mu\right)$$

ed il termine $\dfrac{R}{y+1}$ lo dovremo prendere fra i limiti

$$y_1=-\frac{\rho}{m},\quad y_2=\frac{\rho}{m}$$

onde avremo per esso

$$-\frac{2\rho}{m^4-\rho^2}\sqrt{[(p^2\rho^2+m^2)(r^2\rho^2-m^2)]}\;.$$

Ora abbiamo trovato

$$r^2=\frac{m^2}{\rho^2}$$

cioè

$$r^2\rho^2 - m^2 = 0\ ;$$

dunque è nullo l' integrale definito di

$$d.\frac{R}{y+1}\ .$$

Se i coefficienti della (e) si riducono avremo

$$S = \frac{qdd'}{2ls\cos\theta}$$

$$\times\left[\left(p^2\int_0^\pi \frac{dy}{R} - p^2\lambda^2\int_0^\pi \frac{(y^2-1)dy}{R} - \frac{\lambda^2}{\mu^2}\int_0^\pi \frac{dy}{(y+1)R}\right]\right.$$

nella quale sostituiti gli integrali definiti assegnati, avremo per la superficie del mezzo cono obliquo a base circolare

$$S = \frac{qdd'}{2sl\cos\theta}$$

$$\times\left[\left(\frac{2p^2\mu}{r} + \frac{2p^2\lambda^2\mu}{r} - \frac{2\lambda^2}{\mu r^2}\right)F\left(\frac{\pi}{2}, \mu\right) - \frac{2p^2\lambda^2\mu}{r^3}\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \mu, -1\right)\right.$$

$$\left. - \frac{2\lambda^2}{\mu r^2}\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \mu, \lambda^2\right)\right]$$

la quale ridotta dà infine

$$S = \frac{qdd'\lambda^2}{sr^2\mu l\cos\theta}$$

$$\times\left[\frac{1}{r}(p^2\mu^2 - r)F\left(\frac{\pi}{2}, \mu\right)\right.$$

$$\left. - \frac{p^2\mu^2}{r}\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \mu, -1\right) + \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \mu, \lambda^2\right)\right]$$

E perchè le funzioni ellittiche di terza specie dipendono da quelle di prima e seconda, così la superficie del cono

obliquo a base circolare dipende da questi trascendenti ellittici.

Il coefficiente

$$\frac{qdd'\lambda^2}{r^2 s\mu l\cos\theta}$$

si potrebbe esprimere soltanto in funzione del raggio del circolo base, e delle apoteme d, d', il che tralasciamo di fare.

Se nella determinazione della superficie del cono circolare si fossero usate le coordinate circolari in luogo delle rettilinee più semplice sarebbe riuscito il calcolo, non che l'espressione della formola finale, come apparirà dal paragrafo seguente nel quale entra l'espressione della stessa superficie.

18. Per assegnare l' angolo formato al vertice del cono nel caso che la superficie venga spianata riprenderemo la formola

$$d\alpha = \frac{\sqrt{[(xdy - ydx + ldy\cos\theta)^2 + l^2 ds^2 \operatorname{sen}^2\theta]}}{x^2 + y^2 + l^2 + 2lx\cos\theta}$$

dalla quale, usando le coordinate circolari

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\operatorname{sen}\varphi$$

dedurremo

$$d\alpha = \frac{rd\varphi\sqrt{(h^2 + r^2 + 2fr\cos\varphi + f^2\cos^2\varphi)}}{r^2 + l^2 + 2fr\cos\varphi}$$

ove f, h sono le coordinate del vertice del cono, ossia

$$f = l\cos\theta\,, \quad h = l\operatorname{sen}\theta\,.$$

La quantità sotto il vincolo radicale non potendo diventare un quadrato se non nel caso di $h = 0$, così onde ridurre la formola a dipendere dai trascendenti ellittici porremo in luogo del coseno il seno della metà dell'arco, ed otterremo

$$d\alpha = \frac{rd\varphi \sqrt{\left(h^2 + (f+r)^2 - 4f(f+r)\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2} + 4f^2\operatorname{sen}^4\frac{\varphi}{2}\right)}}{h^2 + (f+r)^2 - 4fr\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}},$$

Ponendo per comodo

$$4f(f+r) = \text{A},\ 4f^2 = \text{B},\ h^2 + (f+r)^2 = d^2$$
$$h^2 + (f-r)^2 = d'^2$$

essendo d, d' la massima e la minima apotema, avremo

$$(a) \qquad d\alpha = \frac{rd\varphi \sqrt{\left(d^2 - \text{A}\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2} + \text{B}\operatorname{sen}^4\frac{\varphi}{2}\right)}}{d^2 - 4fr\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}},$$

Si faccia ora

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{n}\operatorname{tang}\frac{\omega}{2},$$

da cui

$$(b) \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2} &= \frac{1 - \cos\omega}{n^2 + 1 - (1 - n^2)\cos\omega} \\ d\varphi &= \frac{2n d\omega}{n^2 + 1 - (1 - n^2)\cos\omega} \end{aligned} \right.$$

Si sostituisca nella (a) il valore di $\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}$ datoci dalla prima delle (b), e si ponga la condizione perchè manchi il termine moltiplicato per $\cos\omega$, otterremo, facendo

$$g = n^2 + 1,\quad i = 1 - n^2,$$

$$(c) \qquad d\alpha = \frac{rd\varphi \sqrt{(d^2g^2 - \text{A}g + \text{B} + (d^2i^2 - \text{A}i + \text{B})\cos^2\omega)}}{d^2g - 4fr + (4fr - d^2i)\cos\omega}$$

$$(d) \qquad -2d^2(1 - n^4) + \text{A}(1 - n^2) + \text{A}(n^2 + 1 - 2\text{B} = 0).$$

Se nella (d) si sostituiscono i valori di A, B, e si eseguiscono le riduzioni si trova

(e) $$n^2 = \frac{d'}{d}$$

Sotto il vincolo radicale nella (c) si ponga il valore del coseno in funzione del seno, e si riducano i coefficienti del numeratore e denominatore, e per essi troveremo

$$d^2[(n^2+1)^2+(1-n^2)^2]-2A+2B=4d'^2$$

$$d^2(n^2-1)^2+A(n^2-1)+B=4d'^2\left(\frac{1}{2}-\frac{r^2+h^2-f^2}{2dd'}\right)$$

$$d^2(n^2+1)-4fr=d'(d+d')$$

$$4fr-d^2(n^2+1)=d'(d-d')$$

Pei quali valori la (c) si muta in

$$d\alpha=\frac{2rd\varphi\sqrt{\left[1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{r^2+h^2-f^2}{dd'}\right)\operatorname{sen}^2\omega\right]}}{d+d'+(d-d')\cos\omega}$$

ed ancora, ponendo

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{r^2+h^2-f^2}{dd'}\right)=c^2\,,\quad \frac{d-d'}{d+d'}=p$$

risulta

(f) $$d\alpha=\frac{2r}{d+d'}\cdot\frac{d\varphi\sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\omega)}}{1+p\cos\omega}$$

Ma essendo

$$d\varphi=\frac{2d\left(\frac{d'}{d}\right)^{\frac{1}{2}}d\omega}{d+d'-(d-d')\cos\omega}=\frac{2d\left(\frac{d'}{d}\right)^{\frac{1}{2}}}{d+d'}\cdot\frac{d\omega}{1-p\cos\omega}$$

posto nella (f) risulterà

$$d\alpha=\frac{4rd\left(\frac{d'}{d}\right)^{\frac{1}{2}}}{(d+d')^2}\cdot\frac{d\omega\sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\omega)}}{1-p^2\cos^2\omega}$$

da cui

$$(g) \qquad d\alpha = \frac{r}{\sqrt{dd'}} \cdot \frac{d\omega\sqrt{(1-c^2\mathrm{sen}^2\omega)}}{1+m\mathrm{sen}^2\omega}$$

ponendo

$$m = \frac{(d-d')^2}{4dd'}$$

Osserveremo qui che il valore di c non può diventare nè l'unità nè zero perchè dovrebbe essere $f=0$, e quindi il cono cesserebbe di essere obliquo. È poi facile verificare che la parte

$$\frac{r^2+h^2-f^2}{dd'}$$

del valore di c^2 rappresenta un coseno, il quale può essere zero, positivo, o negativo. Poichè se a partire dal vertice del cono nel piano che contiene la sua altezza ed asse si conduce una retta di lunghezza eguale alla minima apotema e che si trovi dalla parte opposta a questa, otterremo un triangolo di lati

$$d,\ d',\ 2f$$

nel quale detto ε l'angolo opposto a $2f$ sarà

$$\cos\varepsilon = \frac{d^2+d'^2-4f^2}{2dd'} = \frac{r^2+h^2-f^2}{dd'}$$

dal quale impariamo che non potendo essere mai $\varepsilon=0$, $\varepsilon=\pi$, perchè dovrebbe essere $f=0$, così c è sempre minore dell'unità.

Il trinomio $r^2+h^2-f^2$ dà luogo alle tre seguenti ipotesi

$$r^2+h^2-f^2=0,\quad r^2+h^2-f^2>0,\quad r^2+h^2-f^2<0\,.$$

Per la prima, essendo f, h le coordinate del vertice del cono, sarà

$$(i) \qquad \frac{f^2}{r^2}-\frac{h^2}{r^2}=1$$

l'equazione di una iperbole equilatera, il cui semi-asse è il raggio del circolo del cono base, ed ha i suoi vertici alle estremità dello stesso raggio. E quindi tutti i coni obliqui a base circolare che hanno i loro vertici sulla iperbole (i), hanno per espressione dell'angolo al vertice della superficie spianata

$$(k) \qquad d\alpha = \pm \frac{r}{\sqrt{dd'}} \cdot \frac{d\omega\sqrt{(1-\frac{1}{2}\text{sen}^2\omega)}}{1+m\text{sen}^2\omega}$$

Per tutti questi coni l'angolo ε è retto.

Per la seconda ipotesi, essendo

$$\frac{f^2}{r^2}-\frac{h^2}{r^2}<1$$

i coni corrispondenti hanno i loro vertici fuori della iperbole (i) e per essi l'angolo ε è acuto.

Per la terza ipotesi avendosi

$$\frac{f^2}{r^2}-\frac{h^2}{r^2}>1$$

rileviamo che i coni hanno i loro vertici entro l'iperbole (i) è l'angolo ε è ottuso.

Da tutto ciò risulta che la (k) è sempre integrabile per funzioni ellittiche, onde prendendola sotto la forma

$$d\alpha = \frac{r'}{\sqrt{dd'}} \cdot \frac{1-c^2\text{sen}^2\omega}{1+m\text{sen}^2\omega} \cdot \frac{d\omega}{\sqrt{(1-c^2\text{sen}^2\omega)}},$$

ed avvertendo essere

$$\frac{1-c^2\text{sen}^2\omega}{1+m\text{sen}^2\omega} = \frac{c^2+m}{m}\,\frac{1}{1+m\text{sen}^2\omega} - \frac{c^2}{m},$$

avremo fra i limiti

$$\omega = 0, \quad \omega = \pi$$

$$\alpha = \frac{r}{\sqrt{dd'}}\left[\frac{c^2+m}{m}\int_0^\pi \frac{d\omega}{(1+m\,\mathrm{sen}^2\omega)\sqrt{(1-c^2\mathrm{sen}^2\omega)}}\right.$$

$$\left. - \frac{c^2}{m}\int_0^\pi \frac{d\omega}{\sqrt{(1-c^2\mathrm{sen}^2\omega)}}\right]$$

e quindi

$$\alpha = \frac{2r}{\sqrt{dd'}}\left[\frac{c^2+m}{m}\,\Pi\left(\frac{\pi}{2},\, c, m\right) - \frac{c^2}{m}\,\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2},\, c\right)\right]$$

19. Per applicazione della formola (8) a coordinate polari prenderemo a considerare un cono retto la base del quale sia la lemniscata di Bernoulli, ed avremo

$$(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2)$$

che per essere

$$x = r\cos\varphi\ ,\quad y = r\,\mathrm{sen}\varphi$$

si muta in

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi$$

dalla quale

$$dr = -\frac{a\,d\varphi\,\mathrm{sen}2\varphi}{\sqrt{(\cos 2\varphi)}}\ .$$

Ora essendo

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{[r^4 d\varphi^2 + l^2(r^2 d\varphi^2 + dr^2)]}$$

si sostituiscano i valori di r e dr con avvertire che i limiti per la quarta parte della lemniscata sono

$$\varphi_0 = 0\ ,\quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$$

avremo, dopo facili riduzioni

$$\mathrm{S} = \frac{a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \sqrt{\left(a^2\cos^2 2\varphi + \frac{l^2}{\cos 2\varphi}\right)}\ .$$

Facendo qui

$$a\cos 2\varphi = x\ , \quad \text{e} \quad d\varphi = -\frac{dx}{2\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

sarà

$$S = \frac{a}{2}\int_a^0 -\frac{dx}{2\sqrt{(a^2-x^2)}}\sqrt{\left(x^2+\frac{al^2}{x}\right)}$$

ovvero invertendo i limiti

$$(a) \qquad S = \frac{a}{4}\int_0^a dx\sqrt{\left(\frac{x^3+al^2}{a^2x-x^3}\right)}$$

Integreremo quest'ultima espressione pel caso particolare di $a = l$ ed in pari tempo porremo

$$x = au$$

onde i nuovi limiti saranno

$$u = 0\ , \quad u = 1$$

e sarà

$$S = \frac{a^2}{4}\int_0^1 du\sqrt{\left(\frac{u^3+1}{u-u^3}\right)}\ ,$$

tolto il fattore comune $u+1$ sarà pure

$$(b) \qquad S = \frac{a^2}{4}\int_0^1 du\sqrt{\left(\frac{u^2-u+1}{u-u^2}\right)}$$

Per integrare questa espressione si ponga

$$u = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta)$$

dalla quale

$$du = -\tfrac{1}{2}d\theta \operatorname{sen}\theta\ ,$$

ed ai limiti $u = 0$, $u = 1$ corrisponderanno

$$\theta = \pi\ , \quad \theta = 0$$

onde invertendo i limiti avremo

$$S = \frac{a^2}{8}\int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}\theta\sqrt{\left(\frac{(1+\cos\theta)^2-2(1+\cos\theta)+4}{2(1+\cos\theta)-(1+\cos\theta)^2}\right)}$$

dalla quale

$$S = \frac{a^2}{8}\int_0^{\pi} d\theta\sqrt{(3 + \cos^2\theta)},$$

ovvero per la nota proprietà delle funzioni ellittiche sarà ancora

$$S = \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\sqrt{(4 - \text{sen}^2\theta)}.$$

ed in fine

$$(c) \qquad S = \frac{a^2}{2} E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

pel valore della quarta parte dell' area del cono retto la cui base sia una lemniscata.

Dalla (c) rileviamo che la superficie del cono retto la cui base è la lemniscata di Bernoulli e l'altezza eguale al suo semiasse è data da un rettangolo che ha per base un arco di una determinata ellisse conica, e per altezza la la metà del semi-asse della direttrice.

20. Per preparare la formola

$$S = \frac{a^2}{4}\int_0^1 du\sqrt{\left(\frac{u^2 - u + 1}{u - u^2}\right)}$$

onde ridurla ai trascendenti ellittici non può usarsi la consueta sostituzione lineare

$$u = \frac{my + n}{y + 1}$$

perchè condurrebbe a condizioni assurde, dovendo essere coesistenti

$$2mn - (m + n) + 2 = 0$$

$$m + n - 2mn = 0$$

Però se poniamo

$$u = \frac{my + 1}{y}$$

essendo

$$du = -\frac{dy}{y^2},$$

ed ai limiti $u = 0$, $u = 1$ corrispondendo

$$y_1 = -\frac{1}{m}, \quad y_2 = \frac{1}{1 - m}$$

troveremo facilmente

$$S = \frac{a^2}{4}\int_{y_1}^{y_2} -\frac{dy}{y^2}\sqrt{\left(\frac{(m^2 - m + 1)y^2 + 1}{(m - m^2)y^2 - 1}\right)}$$

e nello stesso tempo l'unica equazione di condizione, perchè manchino le potenze prime della y

$$2m - 1 = 0$$

onde

$$S = \frac{a^2}{4}\int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{y^2}\sqrt{\left\{\frac{\frac{3}{4}y^2 + 1}{\frac{1}{4}y^2 - 1}\right\}}.$$

Posto

$$\frac{1}{2}y = \frac{1}{\cos\varphi}$$

troviamo

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{d\varphi \operatorname{sen}\varphi}{2}$$

onde

$$S = \frac{a^2}{8}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \sqrt{(4 - \operatorname{sen}^2\varphi)}$$

nella quale i limiti dell' integrazione sono

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \pi$$

come altrove.

21. Per l'angolo al vertice lorchè la superficie si suppone spianata, fatte le note sostituzioni nella rispettiva formola a coordinate polari abbiamo

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\omega \sqrt{(a^4 \cos^3 2\omega + a^2 l^2)}}{(a^2 \cos 2\omega + l^2)\sqrt{(\cos 2\omega)}}$$

nella quale fatto

$$\cos 2\omega = x\,, \quad d\omega = \frac{-dx}{2\sqrt{(1-x^2)}}\,,$$

i limiti diverranno

$$x = 1\,, \quad x = 0$$

e sarà invertendo i limiti

$$\alpha = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{a^2 x + l^2} \sqrt{\left(\frac{a^4 x^3 + a^2 l^2}{x - x^3}\right)}\,.$$

Considerando qui il caso semplice di

$$l = a$$

avremo

$$\alpha = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \sqrt{\left(\frac{x^2 - x + 1}{x - x^2}\right)}$$

ove posto

$$x = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi)\quad,$$

avvertendo che ai limiti $x = 0$, $x = 1$ corrisponderanno $\varphi = \pi$, $\varphi = 0$, troveremo

$$\alpha = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{3 + \cos\varphi} \sqrt{(4 - \text{sen}^2\varphi)}$$

ed ancora

$$\alpha = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{d\varphi(3 - \cos\varphi)(4 - \text{sen}^2\varphi)}{(8 + \text{sen}^2\varphi)\sqrt{(4 - \text{sen}^2\varphi)}}$$

che decomporremo nei due seguenti termini

$$M = \int_0^\pi \frac{3d\varphi(4-\mathrm{sen}^2\varphi)}{(8+\mathrm{sen}^2\varphi)\sqrt{(4-\mathrm{sen}^2\varphi)}}$$

$$N = -\int_0^\pi \frac{d\varphi(4-\mathrm{sen}^2\varphi)\cos\varphi}{(8+\mathrm{sen}^2\varphi)\sqrt{(4-\mathrm{sen}^2\varphi)}},$$

il primo dei quali troveremo ridursi a

$$M = \int_0^\pi \frac{36d\varphi}{(8+\mathrm{sen}^2\varphi)\sqrt{(4-\mathrm{sen}^2\varphi)}} - \int_0^\pi \frac{3d\varphi}{\sqrt{(4-\mathrm{sen}^2\varphi)}}$$

$$= \frac{9}{4}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\left(1+\frac{1}{8}\,\mathrm{sen}^2\varphi\right)\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}^2\varphi\right)}}$$

$$-\frac{3}{2}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}^2\varphi\right)}}$$

e quindi

$$M = 2.\ \frac{9}{4}\,\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right) - 2.\ \frac{3}{2}\,F\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Il secondo termine si muta in

$$N = -\int_0^\pi \frac{d\varphi\cos\varphi}{8+\mathrm{sen}^2\varphi}\sqrt{(4-\mathrm{sen}^2\varphi)}$$

ove fatto, senza mutare i limiti,

$$\mathrm{sen}\varphi = 2\mathrm{sen}\theta,\ d\varphi\cos\varphi = 2d\theta\cos\theta$$

otterremo la espressione razionale

$$N = -\int_0^\pi \frac{d\theta\cos^2\theta}{3-\cos^2\theta}$$

la quale facilmente si muta in

$$N = -\int_0^\pi \frac{3d\varphi}{3-\cos^2\theta} + \int_0^\pi d\theta,$$

ovvero essendo

$$\frac{1}{3-\cos^2\theta}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\cos\theta}-\frac{1}{\sqrt{3}-\cos\theta}\right),$$

$$N=-\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^\pi\frac{d\theta}{\sqrt{3}+\cos\theta}-\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^\pi\frac{d\theta}{\sqrt{3}-\cos\theta}$$

$$+2\,.\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Ora, quando si supponga $a > b$, abbiamo

$$\int\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{2}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\ \text{Arc.tang}\left[=t\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}\right]$$

ove

$$t=\tang\frac{\theta}{2}\,,$$

in cui fatte le opportune sostituzioni abbiamo

$$\int_0^\pi\frac{d\theta}{\sqrt{3}+\cos\theta}=\sqrt{2}\,.\,\frac{\pi}{2}=\int_0^\pi\frac{d\theta}{\sqrt{3}-\cos\theta}$$

e quindi

$$N=-\sqrt{3}.\sqrt{2}.\,\frac{\pi}{2}+2.\frac{\pi}{2}$$

e finalmente per espressione dell'angolo cercato della quarta parta della superficie del cono che ha per base la lemniscata

$$\alpha=\frac{9}{4}\,\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)-\frac{3}{2}\,F\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

21. Per avere l' angolo che una generatrice qualunque forma coll'asse riprenderemo la formola (23)

$$\cos\mu=\frac{l}{\sqrt{(x^2+y^2+l^2)}}$$

e poichè per la lemniscata è

$$x^2 + y^2 = a\sqrt{(x^2 - y^2)}$$

ed in coordinate circolari, essendo r il raggio vettore

$$x^2 + y^2 = ar\sqrt{\cos 2\varphi}$$

sarà

$$\cos\mu = \frac{l}{\sqrt{[l^2 + ar\sqrt{\cos 2\varphi}]}}$$

ove per $\varphi = 0$ essendo $r = a$, abbiamo

$$\cos\mu = \frac{l}{\sqrt{(l^2 + a^2)}}$$

e per $\varphi = \frac{\pi}{4}$ essendo $r = 0$ risulta

$$\cos\mu = 1.$$

22. Prima di applicare le nostre formole alla determinazione della superficie dei coni obliqui à base ellittica ci proporremo la soluzione del seguente.

Problema. *Data la lunghezza dell'asse di un cono a base ellittica ed a semplice obliquità, determinare la sezione circolare che passa pel centro dell'ellisse base.*

Ritenute le denominazioni stabilite per un cono qualunque, sia fig. 2. ASD la sezione principale del cono dato, CB $= a$ il semi-asse maggiore della ellisse, CY $= b$ il minore. Immaginiamo che per l'asse minore passi un piano il quale, nel risultare normale al piano principale, formi l'angolo α col piano della ellisse AYB. Su di questa si prenda un punto qualunque M, il quale sarà fissato dalle coordinate

$$CP = x, \ PM = y.$$

Condotta per M l'apotema SM sia N il punto corrispondente

sulla sezione RYND: fatta la costruzione segnata in figura poniamo

$$CQ = x', \ QN = y'$$

avremo

$$Pp = Mm = OL = x\text{sen}\alpha$$

$$Cp = x\cos\alpha.$$

Poichè i punti O, m, N si trovano necessariamente sulla retta medesima, così sono tra loro simili i triangoli

SLM, SON, OQN, Opm

e da questi abbiamo

$$\frac{SL}{SO} = \frac{Om}{ON} = \frac{Op}{OQ} = \frac{pm}{QN}$$

nelle quali sostituiti i simboli analitici risulta

$$\frac{l\text{sen}(\alpha+\theta) - x\text{sen}\alpha}{l\text{sen}(\alpha+\theta)} = \frac{x\cos\alpha - l\cos(\alpha+\theta)}{x' - l\cos(\alpha+\theta)} = \frac{y}{y'}.$$

Dal confronto del primo col secondo e terzo membro ricaviamo

$$(1) \begin{cases} x = \dfrac{x' l\text{sen}(\alpha+\theta)}{x'\text{sen}\alpha + l\text{sen}\theta} \\ \\ y = \dfrac{y' l\text{sen}\theta}{x'\text{sen}\alpha + l\text{sen}\theta} \end{cases}$$

Ora essendo per la ellisse base del cono obliquo

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

se in questa poniamo i valori datici dalle (1) troveremo

$$(2) \ y'^2 + \frac{b^2[l^2\text{sen}^2(\alpha+\theta) - a^2\text{sen}^2\alpha]}{a^2l^2\text{sen}^2\theta} x'^2 - \frac{2b^2\text{sen}\alpha}{l\text{sen}\theta} x' - b^2 = 0$$

23. Affinchè la sezione sia circolare dovrà essere

$$\frac{b^2[l^2\text{sen}^2(\alpha+\theta)-a^2\text{sen}^2\alpha]}{a^2l^2\text{sen}^2\theta}=1$$

ovvero

$$a^2l^2\text{sen}^2\theta=b^2[l^2\text{sen}^2(\alpha+\theta)-a^2\text{sen}^2\alpha]$$

dalla quale si deve ricavare il valore di α.

A questo fine si decomponga nei suoi fattori il secondo membro, e si divida e moltiplichi per $\cos^2\alpha$, e per comodo si ponga

$$l\cos\theta=f,\quad l\text{sen}\theta=h,$$

designando per f, h le coordinate del vertice del cono obliquo, troveremo

$$\frac{a^2h^2}{b^2}=\cos^2\alpha[(f-a)\text{tang}\alpha+h][(f+a)\text{tang}\alpha+h)$$

nella quale posto il valore del coseno in funzione della tangente, dopo semplici riduzioni troveremo

$$(3)\quad \text{tang}^2\alpha\left[\frac{a^2(b^2+h^2)-b^2f^2}{b^2}\right]-2hf\text{tang}\alpha+\frac{e^2h^2}{b^2}=0$$

che risoluta dà

$$(4)\qquad \text{tang}\alpha=\frac{b^2hf\pm ah\sqrt{(b^2f^2-b^2e^2-e^2h^2)}}{a^2(b^2+h^2)-b^2f^2}$$

da cui impariamo esistere per α due valori i quali possono essere reali ed immaginari.

24. Esaminiamo successivamente i differenti casi che possono aver luogo.

Sia primieramente

$$(5)\qquad b^2f^2-b^2e^2-e^2h^2=0\ ;$$

avremo

$$\text{tang}\alpha=\frac{b^2hf}{a^2(b^2+h^2)-b^2f^2}$$

che per la (5) si ridurrà a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{hf}{b^2 + h^2}$$

ed ancora per la medesima relazione (5) troveremo

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{e^2 h}{b^2 f} = \frac{e^2 \operatorname{tang}\theta}{b^2} .$$

Giova intanto avvertire che la (5) è la condizione perchè le (4) sia un quadrato.

Essendo

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{e^2 h} = \frac{\cos\alpha}{b^2 f} = \frac{1}{\sqrt{(e^4 h^2 + b^4 f^2)}}$$

troveremo per l'equazione della sezione circolare

$$y'^2 + x'^2 - \frac{2b^2 e^2}{\sqrt{(e^4 h^2 + b^4 f^2)}}\, x' - b^2 = 0 ,$$

dalla quale abbiamo primieramente il raggio espresso da

$$r = \frac{a b^2 f}{\sqrt{(b^4 f^2 + e^4 h^2)}} .$$

e quindi ancora

$$\mathrm{CD} = \frac{b^2(af + e^2)}{\sqrt{(e^4 h^2 + b^4 f^2)}} , \quad \mathrm{CR} = \frac{b^2(e^2 - af)}{\sqrt{(e^4 h^2 + b^4 f^2)}} .$$

onde risultano con facilità

$$\overline{\mathrm{BD}}^2 = \frac{e^4(a^2 h^2 + b^4)}{e^4 h^2 + b^4 f^2} = \overline{\mathrm{AR}}^2$$

e

(6) $$\mathrm{CO} = \frac{e^2 b^2}{\sqrt{(e^4 h^2 + b^4 f^2)}} .$$

Ora è facile riconoscere che la perpendicolare calata dal vertice del cono sulla RD cade nel punto medio di questa, e quindi nel centro della sezione circolare: poichè la di-

stanza del centro della circonferenza da quello della ellisse è data dalla (6): la distanza da C al piede della perpendicolare che diremo Δ è data da

$$\Delta = l\cos(\alpha + \theta)$$

nella quale eseguito lo sviluppo, e sostituiti i valori di $\text{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ risulta

$$CO = \Delta$$

Dunque il cono RSDN è circolare retto ed il suo asse è

$$(7) \qquad SO = l\,\text{sen}(\alpha + \theta) = \frac{a^2 fh}{\sqrt{(e^4 h^2 + b^4 f^2)}} :$$

26. Rappresentato per μ l'angolo che al vertice del cono retto forma l'apotema col suo asse avremo

$$\text{tang}\mu = \frac{b^2}{ah}$$

poichè

$$\text{tang}\mu = \frac{OD}{OS}$$

Da quanto esponemmo risulta che l'attuale cono obliquo a base ellittica è di sua natura circolare.

27. Tutti i coni ellitici obliqui che sono di natura circolare si trovano coi loro vertici sopra una determinata iperbole.

Abbiamo di fatti per tali coni la condizione (5) nella quale posto per comodo $f = X$, $h = Y$, troviamo

$$(8) \qquad \frac{X^2}{e^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \; ;$$

e quindi se per l'asse del cono obliquo e per l'asse maggiore dell'ellisse base si faccia passare un piano, e su di questo si tracci una iperbole di semi-assi e, b sarà dessa il

luogo geometrico dei vertici di tutti i coni obliqui di natura circolari. Questa iperbole passa pei fuochi dell'ellisse base.

Sia in secondo luogo

$$b^2f^2 - e^2h^2 - e^2b^2 > 0$$

La sezione circolare fatta per un piano normale alla sezione principale del dato cono ellittico è ugualmente possibile; ma esso cono non è di natura circolare. E perchè per si fatti coni abbiamo

$$\frac{X^2}{e^2} - \frac{Y^2}{b^2} > 1$$

quindi tutti i coni corrispondenti hanno i loro vertici entro la iperbole (8).

In terzo luogo sia

$$b^2f^2 - e^2h^2 - e^2b^2 < 0.$$

In questa ipotesi è impossibile avere sezioni circolari con piani normali alla sezione principale del cono dato, e poichè è

$$\frac{X^2}{e^2} - \frac{Y^2}{b^2} < 1$$

così tutti questi coni hanno i loro vertici fuori delle iperbole (8).

28. Finalmente merita di essere ancora considerato il caso di

$$(9) \qquad a^2(b^2 + h^2) - b^2f^2 = 0 \;;$$

nel quale l'equazione

$$\tan g\alpha^2 \left[\frac{a^2(b^2 + h^2) - b^2f^2}{b^2}\right] - 2hf \tan g\alpha + \frac{e^2h^2}{b^2} = 0$$

si riduce a

$$2hf\tang\alpha - \frac{e^2h^2}{b^2} = 0$$

e quindi

$$\tang\alpha = \frac{e^2h}{2b^2f}$$

Questo valore si potrebbe ancora ricavare dalla (4) la quale in tale ipotesi, presentandosi sotto la seguente forma

$$\tang\alpha = \infty \ , \quad \tang\alpha = \frac{0}{0}$$

ne fa conoscere esservi pure una posizione pel piano circolare nella quale esso è normale al piano che contiene la la ellisse base.

La condizione (9) dà luogo all'equazione

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

cioè ad una iperbole di semi-assi a, b, onde sul piano della sezione principale del dato cono, tracciata una iperbole che passi coi suoi vertici per quelli della ellisse base, su di essa sono allocati i vertici di tutti i coni corrispondenti alla fatta ipotesi.

29. Ciò premesso, per assegnare la superficie del cono obliquo a base ellittica riprenderemo la formola generale a semplice obliquità ed in essa porremo per l'equazione della direttrice

$$x = a\,\text{sen}\varphi \ , \quad y = b\cos\varphi \ ,$$

e fatte le opportune sostituzioni e riduzioni otterremo

$$dS = \frac{d\varphi}{2}\sqrt{(b^2(a+l\cos\theta\,\text{sen}\varphi)^2 + a^2l^2\text{sen}^2\theta\cos^2\varphi + b^2l^2\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\varphi)}$$

ovvero

$$(a)\left\{\begin{array}{c} dS=\frac{d\varphi}{2} \\ \times\sqrt{[a^2(b^2+l^2\text{sen}^2\theta)+2ab^2l\cos\theta\,\text{sen}\varphi} \\ +(b^2l^2\cos^2\theta-e^2l^2\text{sen}^2\theta)\text{sen}^2\varphi] \end{array}\right.$$

30. Se in questa espressione si ammetta che abbia luogo la condizione

$$\text{tang}\theta=\frac{b}{e}$$

mancando allora il termine contenente il quadrato del seno avremo

$$dS=\frac{d\varphi}{2}\sqrt{[a^2(b^2+l^2\text{sen}^2\theta)+2ab^2l\cos\theta\,\text{sen}\varphi]},$$

e posto

$$ab^2l\cos\theta=B,\quad a^2(b^2+l^2\text{sen}^2\theta)=C$$

sarà da integrarsi

$$(b)\qquad dS=\frac{d\varphi}{2}\sqrt{(C+2B\,\text{sen}\varphi)}$$

la quale si riduce a dipendere dalle funzioni ellittiche. Pongasi difatti

$$C+2B\,\text{sen}\varphi=x^2.$$

da cui

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{[(2B-C+x^2)(2B+C-x^2)]}}{2B}$$

e

$$d\varphi=\frac{xdx}{B\cos\varphi}.$$

Prima di sostituire avvertiremo di prendere l'integrale tra i limiti

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{\pi}{2}$$

per ottenere così la metà della superficie del cono, cioè quella che tutta intera trovasi da una parte del piano che passa pel vertice e per l'asse della direttrice, onde la superficie totale si avrà col duplicare quella presa fra essi limiti. A questo limite di φ corrispondono per la x

$$x_0 = \sqrt{(C - 2B)},\ x_1 = \sqrt{(C + 2B)}.$$

Dopo ciò avremo

$$S_1 = 2\int_{x_0}^{x_1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{[(2B - C + x^2)(2B + C - x^2)]}}.$$

Per riconoscere quali segni competano alle quantità costanti

$$2B - C,\ 2B + C$$

si ricordi essere

$$\text{tang}\theta = \frac{b}{e}$$

e quindi

$$\text{sen}\theta = \frac{b}{a},\ \cos\theta = \frac{e}{a}$$

che ci daranno

$$2B - C = -b^2[b^2 + (l - e)^2]$$

$$2B + C = b^2[b^2 + (l + e)^2]$$

la prima delle quali è costantemente negativa e la seconda positiva. Se dunque poniamo

$$b^2[b^2 + (l - e)^2] = p^2$$
$$b^2[b^2 + (l + e)^2] = q^2$$

avremo $q > p$ ed

$$S_1 = 2\int_{x_0}^{x_1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{[(x^2-p^2)(q^2-x^2)]}},$$

ove per comodo posto

$$x = pqu, \; dx = pqdu$$

sarà

$$(c) \qquad S_1 = 2\int_{u_0}^{u_1} \frac{p^2q^2u^2du}{\sqrt{[(q^2u^2-1)(1-p^2u^2)]}}$$

il cui radicale è reale nelle due ipotesi

$$q^2u^2 - 1 > 0, \; 1 - p^2u^2 > 0$$

$$q^2u^2 - 1 < 0, \; 1 - p^2u^2 < 0$$

la seconda delle quali è assurda perchè essendo

$$\frac{1}{q} < \frac{1}{p}$$

ci conduce ad

$$u < \frac{1}{q}, \; u > \frac{1}{p}.$$

Si faccia

$$u^2 = \frac{1}{q^2\cos^2\theta + p^2\operatorname{sen}^2\theta}$$

dalla quale

$$du = \frac{(q^2 - p^2)d\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{(q^2\cos^2\theta + p^2\operatorname{sen}^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$u^2du = \frac{(q^2 - p^2)d\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{(q^2\cos^2\theta + p^2\operatorname{sen}^2\theta)^{2+\frac{1}{2}}}$$

e quindi sostituendo nella (c) sarà

$$S_1 = \frac{2p^2}{q}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{p^2q^2d\theta}{(q^2 - (q^2 - p^2)\operatorname{sen}^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

Per determinare i limiti della variabile θ ricorderemo che quelli della x sono

$$x_0=\sqrt{(\mathrm{C}-2\mathrm{B})}=p,\ x_1=\sqrt{(\mathrm{C}+2\mathrm{B})}=q$$

e quelli della u sono dati da

$$u_0=\frac{x_0}{pq}=\frac{1}{q},\ u_1=\frac{x_0}{pq}=\frac{1}{p}$$

e però dalla relazione tra u e θ deduciamo

$$q^2\cos^2\theta+p^2\mathrm{sen}^2\theta=\frac{1}{u^2}:$$

e quindi le due

$$q^2\cos^2\theta+p^2\mathrm{sen}^2\theta=q^2$$

$$q^2\cos^2\theta+p^2\mathrm{sen}^2\theta=p^2$$

la prima delle quali conduce a $\theta=0$ e la seconda a

$$\theta=\frac{\pi}{2}.$$

Fatto per comodo

$$c^2=\frac{q^2-p^2}{q^2}$$

avremo

$$(d)\qquad \mathrm{S}_1=\frac{2p^2}{q}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{d\theta}{(1-c^2\mathrm{sen}^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Per eseguire la integrazione della (d) prenderemo il differenziale di

$$\frac{\mathrm{sen}\theta\cos\theta}{(1-c^2\mathrm{sen}^2\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

e troveremo

$$d\,.\frac{\mathrm{sen}\theta\cos\theta}{(1-c^2\mathrm{sen}^2\theta)^{\frac{1}{2}}}=\frac{d\theta}{(1-c^2\mathrm{sen}^2\theta)^{\frac{3}{2}}}(1-2\mathrm{sen}^2\theta+c^2\mathrm{sen}^4\theta).$$

ovvero

$$d.\ \frac{\mathrm{sen}\theta\cos\theta}{(1-c^2\mathrm{sen}^2\theta)^{\frac{1}{2}}}=\frac{d\theta}{c^2(1-c^2\mathrm{sen}^2\theta)^{\frac{3}{2}}}[(c^2-1)+(1-c^2\mathrm{sen}^2\theta)^2]$$

$$=\frac{c^2-1}{c^2}\frac{d\theta}{(1-c^2\mathrm{sen}^2\theta)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{c^2}d\theta(1-c^2\mathrm{sen}^2\theta)^{\frac{1}{2}}$$

da cui integrando deduciamo

$$\int\frac{d\theta}{(1-c^2\mathrm{sen}^2\theta)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{c^2-1}\int d\theta(1-c^2\mathrm{sen}^2\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{c^2}{c^2-1}\cdot\frac{\mathrm{sen}\theta\cos\theta}{(1-c^2\mathrm{sen}^2\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

e quindi

$$\int\frac{d\theta}{(1-c^2\mathrm{sen}^2\theta)^{\frac{3}{2}}}=\frac{q^2}{p^2}\,\mathrm{E}(\theta,c)-\frac{q^2-p^2}{p^2}\cdot\frac{\mathrm{sen}\theta\cos\theta}{(1-c^2\mathrm{sen}^2\theta)^{\frac{1}{2}}};$$

dunque sostituendo nella (d) risulta

$$\mathrm{S}_1=\frac{2p^2}{q}\left[\frac{q^2}{p^2}\,\mathrm{E}(\theta,c)-\frac{q^2-p^2}{p^2}\cdot\frac{\mathrm{sen}\theta\cos\theta}{(1-c^2\mathrm{sen}^2\theta)^{\frac{1}{2}}}\right]+\mathrm{Cost.}$$

ed in fine

$$\mathrm{S}_1=2q\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{2},c\right).$$

31. La formola

$$\mathrm{S}_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sqrt{(\mathrm{C}+2\mathrm{B}\mathrm{sen}\varphi)}$$

può integrarsi con maggior semplicità facendo uso della sostituzione seguente

$$\varphi=\frac{\pi}{2}-2\alpha,$$

essendo i nuovi limiti

$$\frac{\pi}{2},\ 0$$

ed avremo

$$S_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} - 2d\alpha \sqrt{(C + 2B\cos 2\alpha)}$$

ove permutando i limiti e dando tutto in seno sarà

$$S_1 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \sqrt{(C + 2B - 4B\,\mathrm{sen}^2\alpha)}\ .$$

Ora facilmente trovasi

$$\frac{4B}{C + 2B} = \frac{4el}{b^2 + (e + l)^2}\ ;$$

ma è

$$\frac{4el}{(e + l)^2} < 1$$

perchè

$$\frac{4el}{(e + l)^2} = 1 - \left(\frac{e - l}{e + l}\right)^2$$

e così a più forte ragione sarà

$$\frac{4el}{(e + l)^2 + b^2} < 1$$

che rappresentato per c^2 avremo

$$S_1 = 2\sqrt{(C + 2B)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \sqrt{(1 - c^2\,\mathrm{sen}^2\alpha)}$$

$$= 2\sqrt{(C + 2B)}E\left(\frac{\pi}{2},\ c\right).$$

32. Se si fosse fatto uso della formola espressa in funzione dell'ascissa lineare, pel caso fin qui contemplato avremmo avuta la formola

$$dS = \frac{dx}{2}\sqrt{\left(\frac{2Bx + C}{a^2 - x^2}\right)}$$

la quale va integrata da

$$x = -a \;, \quad \text{ad} \quad x = a \;.$$

Onde ridurre questa espressione faremo uso della sostituzione lineare

$$x = \frac{my + n}{y + 1}$$

con che troveremo

$$dS = \frac{(m - n)dy}{2(y + 1)^2}\sqrt{\left(\frac{(2Bm + C)y^2 + 2Bn + C}{(a^2 - m^2)y^2 + a^2 - n^2}\right)}$$

e le due equazioni di condizione

$$m + n = -\frac{C}{B}, \quad mn = a^2$$

dalle quali

$$m = -\frac{C}{2B} + \frac{\sqrt{[(C + 2Ba)(C - 2Ba)]}}{2B}$$

$$n = -\frac{C}{2B} - \frac{\sqrt{[(C + 2Ba)(C - 2Ba)]}}{2B}$$

e quindi

$$2Bm + C = \sqrt{[(C + 2Ba)(C - 2Ba)}$$

$$2Bn + C = -\sqrt{[(C + 2Ba)(C - 2Ba)}$$

le quali sono sempre reali perchè

$$C - 2Ba > 0$$

come può facilmente verificarsi sostituendo per B e C i loro

valori, ed esprimendo per q^2 il valore del radicale avremo

$$2Bm + C = q^2 , \quad 2Bn + C = - q^2 .$$

Le quantità

$$a^2 - m^2 ; \quad a^2 - n^2$$

si trovano l'una positiva e l'altra negativa, mentre

$$a^2 - m^2 = 2 \sqrt{\left(\frac{C^2}{4B^2} - a^2\right)} \left[\frac{C}{2B} - \sqrt{\left(\frac{C^2}{4B^2} - a^2\right)}\right],$$

$$n^2 - a^2 = 2 \sqrt{\left(\frac{C^2}{4B^2} - a^2\right)} \left[\frac{C}{2B} + \sqrt{\left(\frac{C^2}{4B^2} - a^2\right)}\right].$$

e fatto quindi

$$a^2 - m^2 = p^2 r^2 , \quad n^2 - a^2 = r^2 ,$$

risultando

$$p^2 = \frac{a^2 - m^2}{n^2 - a^2} = \frac{m^2}{a^2}$$

sarà

$$p^2 < 1 .$$

Ora avvertendo che ai limiti

$$x_0 = -a , \quad x_1 = a$$

corrispondono per y

$$y_0 = - \frac{a}{m} , \quad y_1 = \frac{a}{m}$$

avremo

$$dS = \frac{(m - n)dy}{2(y + 1)^2} \sqrt{\left(\frac{q^2(y^2 - 1)}{r^2(p^2 y^2 - 1)}\right)}$$

e quindi

$$S = \frac{q(m - n)}{2r} \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{(y + 1)^2} \sqrt{\left(\frac{y^2 - 1}{p^2 y^2 - 1}\right)}$$

ovvero

$$S = \frac{q(m-n)}{2r}\int_{y_0}^{y_1} \frac{(y-1)dy}{y+1} \cdot \frac{1}{R}$$

ponendo

$$R = \sqrt{[(y^2-1)(p^2y^2-1)]} ,$$

e perchè

$$\frac{y-1}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1}$$

sarà

$$S = \frac{q(m-n)}{2r}\left[\int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{R} - 2\int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{(y+1)R}\right]$$

e ponendo

$$y = \frac{1}{p\operatorname{sen}\varphi} \qquad dy = \frac{-d\varphi\cos\varphi}{p\operatorname{sen}^2\varphi} ;$$

e pei limiti di φ, essendo

$$p = \pm\frac{m}{a}$$

avremo per $p = -\frac{m}{a}$

$$\operatorname{sen}\varphi = -\frac{a}{my}$$

ove per $y_0 = -\frac{a}{m}$ è $\varphi = \frac{\pi}{2}$

per $y_1 = \frac{a}{m}$ è $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

e quindi sostituendo ed invertendo i limiti

$$S = \frac{q(m-n)}{2r}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta} - 2p\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\varphi}{1+p\operatorname{sen}\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}\right].$$

Per assegnare

$$\int \frac{\text{sen}\varphi}{1+p\,\text{sen}\varphi}\,\frac{d\varphi}{\Delta}$$

si ponga

$$\frac{\text{sen}\varphi}{1+p\,\text{sen}\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{\text{sen}\varphi-p\,\text{sen}^2\varphi}{1-p^2\text{sen}^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$=\frac{\text{sen}\varphi}{1-p^2\text{sen}^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}-\frac{1}{p}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta^3}+\frac{1}{p}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}$$

onde sarà

$$\int\frac{\text{sen}\varphi}{1+p\,\text{sen}\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}=\int\frac{\text{sen}\varphi}{1-p^2\text{sen}^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}-\frac{1}{p}\int\frac{d\varphi}{\Delta^3}+\frac{1}{p}\int\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Ora essendo

$$d.\frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1-p^2\text{sen}\varphi)}}=\frac{(p^2-1)d\varphi\,\text{sen}\varphi}{(1-p^2\text{sen}^2\varphi)\Delta}$$

avremo

$$\int\frac{\text{sen}\varphi}{1-p^2\text{sen}^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{1}{p^2-1}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1-p^2\text{sen}^2\varphi)}}$$

e quindi

$$\int\frac{\text{sen}\varphi}{1+p\,\text{sen}\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{1}{p^2-1}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1-p^2\text{sen}^2\varphi)}}-\frac{1}{p}\int\frac{d\varphi}{\Delta^3}+\frac{1}{p}\int\frac{d\varphi}{\Delta}$$

ma abbiamo già trovato, §. 30

$$\int\frac{d\varphi}{(1-p^2\text{sen}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{p^2-1}\int d\varphi\sqrt{(1-p^2\text{sen}^2\varphi)}$$

$$+\frac{p^2}{p^2-1}\cdot\frac{\text{sen}\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1-p^2\text{sen}^2\varphi)}}$$

dunque avremo

$$\int\frac{\text{sen}\varphi}{1+p\,\text{sen}\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{1}{p^2-1}\cdot\frac{\cos\varphi}{\Delta}+\frac{1}{p(p^2-1)}\,\text{E}(p,p)$$

$$-\frac{p}{p^2-1}\cdot\frac{\text{sen}\varphi\cos\varphi}{\Delta}+\frac{1}{p}\int\frac{d\varphi}{\Delta}$$

che integrata fra i limiti $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ ci dà

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}\varphi}{1+p\text{sen}\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{2}{p(p^2-1)} \text{E}\left(\frac{\pi}{2}, p\right) + \frac{2}{p} \text{F}\left(\frac{\pi}{2}, p\right)$$

e per $p < 1$ è negativo il coefficiente del primo termine, onde

$$\text{S} = \frac{q(m-n)}{2r}\left[\frac{4}{1-p^2} \text{E}\left(\frac{\pi}{2}, p\right) - 2\text{F}\left(\frac{\pi}{2}, p\right)\right].$$

Dal confronto di questa espressione con quella del §. 31 rappresentante la medesima area ne risulterebbe una particolare relazione fra una funzione ellittica di prima specie e due di seconda.

33. Contemplato il caso il più semplice vediamo ora se la quantità sotto il vincolo radicale della formola (a) sia il quadrato di un binomio della forma

$$m + n\text{sen}\varphi$$

ove m, n sono da determinarsi. Troveremo a questo fine l'equazione di condizione

$$b^2l^2\cos^2\theta = e^2b^2 + e^2l^2\text{sen}^2\theta$$

per la quale il polinomio si muta in

$$a^2(b^2 + l^2\text{sen}^2\theta) + 2a\sqrt{(b^2 + l^2\text{sen}^2\theta)}.be\text{sen}\varphi + b^2e^2\text{sen}^2\varphi$$

e quindi

$$d\text{S} = \frac{d\varphi}{2}\left[a\sqrt{(b^2 + l^2\text{sen}^2\theta)} + bc\text{sen}\varphi\right]$$

la quale integrata fra i limiti

$$0, \pi;\quad \pi, 2\pi$$

abbiamo

$$S_0 = \frac{1}{2}[a\pi\sqrt{(b^2 + l^2 \operatorname{sen}^2\theta)} + 2be]$$

$$S_1 = \frac{1}{2}[a\pi\sqrt{(b^2 + l^2 \operatorname{sen}^2\theta)} - 2be]$$

La prima di queste due espressioni ci dà la superficie del cono obliquo a base ellittica la quale si trova tra il piano che passa pel vertice del cono e l'asse minore della direttrice, e l'apotema massima; e la seconda rappresenta quella parte che trovasi fra il medesimo piano e l'apotema minima.

Poichè

$$S_0 - S_1 = 2be$$

quindi una porzione di superficie è quadrabile esattamente.

La superficie totale troveremo essere espressa per

$$S = 2\pi a \frac{\sqrt{(b^2 + l^2 \operatorname{sen}^2\theta)}}{2}$$

e quindi verificandosi la condizione

$$b^2 l^2 \cos^2\theta = e^2 b^2 + e^2 l^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

stabiliremo che:

La superficie dell'attuale cono obliquo a base ellittica è equivalente a quella di un cono retto a base circolare di raggio a e di altezza $\sqrt{(l^2 \operatorname{sen}^2\theta - e^2)}$

34. Se ora poniamo

$$l\cos\theta = f, \quad l\operatorname{sen}\theta = h$$

rileveremo, per quanto esponemmo al §. 24, che gli attuali coni quadrabili sono quelli i quali hanno i loro vertici su di una iperbole di semi-asse e, b onde

$$\frac{f^2}{e^2} - \frac{h^2}{b^2} = 1$$

è la sua equazione; e che passa pei fuochi dell'ellisse base, e che indefinito è il numero di essi coni, e tutti di natura circolare, rileveremo ancora che pel caso contemplato nel §. 30.

avendo luogo la condizione

$$\tang\theta = \frac{b}{e} = \frac{h}{f}.$$

i coni corrispondenti sono quelli i quali hanno i loro vertici sopra di una retta che è asintoto della iperbole di semi-assi b, e. Ma questa medesima retta, essendo pure asintoto della iperbole conjugata, cioè di quella il cui semi-asse principale è b, ed il secondario e, e che è rappresentata dall'equazione

$$\frac{h^2}{b^2} - \frac{f^2}{e^2} = 1$$

così passeremo ora ad assegnare la superficie di quei coni che hanno i loro vertici su di questa curva.

35. La formola generale

$$dS = \frac{d\varphi}{2} \sqrt{(a^2(b^2+h^2)+2ab^2f\operatorname{sen}\varphi+(b^2f^2-e^2h^2)\operatorname{sen}^2\varphi)}$$

diventa

$$dS = \frac{d\varphi}{2} \sqrt{(a^2(b^2+h^2)+2ab^2f\operatorname{sen}\varphi-e^2b^2\operatorname{sen}^2\varphi)}.$$

In questo caso il trinomio di secondo grado si può decomporre in due fattori reali di primo grado. Poichè posto

$$a^2(b^2+h^2)+2ab^2f\operatorname{sen}\varphi-e^2b^2\operatorname{sen}^2\varphi=(m+p\operatorname{sen}\varphi)(n-p\operatorname{sen}\varphi)$$

troveremo

$$p = eb$$

$$m = \frac{ab(eh\sqrt{2}+bf)}{p}$$

$$n = \frac{ab(eh\sqrt{2}-bf)}{p}$$

ove m, n sono sempre quantità reali. Ritenendo per comodo m, n, p la formola sarà

$$dS = \frac{d\varphi}{2}\sqrt{[(m+p\,\mathrm{sen}\varphi)(n-p\,\mathrm{sen}\varphi)]}.$$

Per ridurre questa espressione a dipendere dalle consuete forme, porremo

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\alpha$$

con che otterremo

$$dS = d\alpha\sqrt{[(m+p\cos2\alpha)(n-p\cos2\alpha)]}$$

ovvero

$$(a)\qquad dS = d\alpha\sqrt{[(m+p-2p\,\mathrm{sen}^2\alpha)(n-p+2p\,\mathrm{sen}^2\alpha)]}.$$

Si ponga ancora

$$\mathrm{tang}\alpha = \lambda\,\mathrm{tang}\beta$$

da cui

$$\mathrm{sen}^2\alpha = \frac{\lambda^2\mathrm{sen}^2\beta}{1+(\lambda^2-1)\mathrm{sen}^2\beta}$$

$$d\alpha = \frac{\lambda d\beta}{1+(\lambda^2-1)\mathrm{sen}^2\beta}.$$

Sostituiti questi valori nella (a) colla condizione che si annulli il coefficiente di $\mathrm{sen}^2\beta$ di uno dei due fattori di secondo grado posto sotto il radicale sarà

$$(b)\left\{\begin{aligned} dS &= \frac{\lambda d\beta}{(1+(\lambda^2-1)\mathrm{sen}^2\beta)^2} \\ &\times\sqrt{\left[(n-p)\left(m+p+[(m+p)(\lambda^2-1)-2p\lambda^2]\mathrm{sen}^2\beta\right)\right]}, \\ &(n-p)(\lambda^2-1)+2p\lambda^2=0\,; \end{aligned}\right.$$

dall'ultima delle quali

$$\lambda^2 = \frac{n-p}{n+p}\,,\ \lambda^2-1 = -\frac{2p}{n+p}$$

e perchè n, p sono quantità positive è sempre

$$\lambda^2-1<0 .$$

Dopo di che la (b) prenderà la forma

$$dS=\frac{\lambda\sqrt{(n-p)}}{\sqrt{(n+p)}}\cdot\frac{d\beta}{(1-k\,\mathrm{sen}^2\beta)^2}\sqrt{[(m+p)(n+p)-2p(m+n)\mathrm{sen}^2\beta]}$$

ed ancora, posto

$$\frac{2p(m+n)}{(m+p)(n+p)}=c^2$$

$$(c)\quad dS=\lambda\sqrt{[(n-p)(m+p)]}\cdot\frac{d\beta}{(1-k\,\mathrm{sen}^2\beta)^2}\sqrt{(1-c^2\mathrm{sen}^2\beta)}$$

che dovremo integrare da $\beta=0$, a $\beta=\pi$ per avere la intera superficie del cono, mentre a questi limiti per α corrispondono $\alpha=0$, $\alpha=\pi$ ed a questi $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=2\pi+\frac{\pi}{2}$, e così l' intera superficie del cono ha la sua origine dall'estremità dell'asse maggiore.

Fatto per comodo

$$\Delta=\sqrt{(1-c^2\mathrm{sen}^2\beta)}$$

la (c) diverrà

$$dS=\lambda\sqrt{[(n-p)(m+p)]}\,\frac{d\beta(1-c^2\mathrm{sen}^2\beta)}{(1-k\,\mathrm{sen}^2\beta)^2\Delta},$$

dalla quale

$$(d)\left\{\begin{aligned} dS=\lambda\sqrt{[(n-p)(m+p)]}\Big[&\frac{c^2+k}{k}\cdot\frac{d\beta}{(1-k\,\mathrm{sen}\beta)^2\Delta}\\ &-\frac{c^2}{k}\,\frac{d\beta}{(1-k\,\mathrm{sen}^2\beta)\Delta}\Big]\end{aligned}\right.$$

Onde integrare il primo termine posto tra parentesi si prenda il differenziale di $\frac{\Delta\mathrm{sen}\beta\cos\beta}{1-k\,\mathrm{sen}^2\beta}$ e si avrà

$$d.\frac{\Delta\mathrm{sen}\beta\cos\beta}{1-k\,\mathrm{sen}^2\beta}$$

$$=\frac{d\Delta.\mathrm{sen}\beta\cos\beta+d\beta.\Delta\cos^2\beta-d\beta.\Delta\mathrm{sen}^2\beta}{1-k\,\mathrm{sen}^2\beta}+\frac{2k\Delta.d\beta\mathrm{sen}^2\beta\cos^2\beta}{(1-k\,\mathrm{sen}^2\beta)^2}$$

ove posto per $d\Delta$, e quindi Δ^2 il rispettivo valore dato per senβ, ed esprimendo tutto per le potenze del seno avremo

$$d.\frac{\Delta \text{sen}\beta\cos\beta}{1-k\text{sen}^2\beta}$$

$$=\frac{d\beta}{\Delta}\left[\frac{1-(2c^2+2c)\text{sen}^2\beta+3c^2\text{sen}^4\beta}{1-k\text{sen}^2\beta}\right]$$

$$+\frac{d\beta}{\Delta}\left[\frac{2k\text{sen}^2\beta-2k(1+c^2)\text{sen}^4\beta+2kc^2\text{sen}^6\beta}{(1-k\text{sen}^2\beta)^2}\right]$$

Ponendo ora

$$1-k\text{sen}^2\beta=z, \quad \text{e} \quad \text{sen}^2\beta=\frac{1-z}{k}$$

e sostituendo questi valori nei coefficienti di $\frac{d\beta}{\Delta}$, e riducendoli, troveremo

$$\frac{-1+\frac{2}{k}(1+c^2)-\frac{3c^2}{k}}{z}+\frac{2\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{c^2}{k}\right)}{z^2}+\frac{c^2}{k^2}z,$$

e fatto

$$\frac{c^2}{k^2}=\text{A}, \quad -1+\frac{2}{k}(1+c^2)-\frac{3c^2}{k}=\text{B}, \quad 2\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{c^2}{k}\right)=\text{C}$$

avremo

$$d.\frac{\Delta\text{sen}\beta\cos\beta}{1-k\text{sen}^2\beta}=\frac{d\beta}{\Delta}\left(\text{A}z+\frac{\text{B}}{z}+\frac{z^2}{\text{C}}\right).$$

ovvero

$$d.\frac{\Delta\text{sen}\beta\cos\beta}{1-k\text{sen}^2\beta}=\frac{d\beta}{\Delta}\left[\text{A}(1-k\text{sen}^2\beta)+\frac{\text{B}}{1-k\text{sen}^2\beta}+\frac{\text{C}}{(1-k\text{sen}^2\beta)^2}\right]$$

dalla quale

$$\frac{d\beta}{(1-k\operatorname{sen}^2\beta)^2\Delta}=\frac{1}{C}d.\frac{\Delta\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{1-k\operatorname{sen}^2\beta}$$

$$-\frac{A}{C}(1-k\operatorname{sen}^2\beta)\frac{d\beta}{\Delta}-\frac{B}{C}\cdot\frac{d\beta}{(1-k\operatorname{sen}^2\beta)\Delta}.$$

Il termine secondo si può mettere sotto la seguente forma

$$\frac{d\beta(1-k\operatorname{sen}^2\beta)}{\sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\beta)}}=\frac{c^2-k}{c^2}\frac{d\beta}{\sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\beta)}}+\frac{k}{c^2}d\beta\sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\beta)}$$

e così

$$\frac{d\beta}{(1-k\operatorname{sen}^2\beta)^2\sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\beta)}}=\frac{1}{C}d.\frac{\Delta\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{1-k\operatorname{sen}^2\beta}$$

$$+\frac{A(k-c^2)}{Cc^2}\frac{d\beta}{\sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\beta)}}-\frac{Ak}{Cc^2}d\beta\sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\beta)}$$

$$-\frac{B}{C}\frac{d\beta}{(1-k\operatorname{sen}^2\beta)\sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\beta)}}.$$

Sostituendo nella (d), integrando fra gli assegnati limiti, e ponendo

$$M=\lambda\sqrt{[(n-p)(m+p)]}$$

risulta

$$S=4M\Big[\frac{A(k^2-c^2)}{Ck c^2}F\left(\frac{\pi}{2},c\right)-\frac{Ak(c^2+k)}{Ckc^2}E\left(\frac{\pi}{2},c\right)$$

$$-\left(\frac{B(c^2+k)}{Ck}+\frac{c^2}{k}\right)\Pi\left(\frac{\pi}{2},c,-k\right)\Big]$$

Dalla quale impariamo che la superficie di quei coni obliqui che hanno i loro vertici sulla iperbole conjugata del §. 34 dipende da funzioni ellittiche di prima e seconda specie.

36. Per quei coni obliqui che hanno i loro vertici entro la iperbole sulla quale si trovano i vertici dei coni quadrabili, prenderemo ad assegnare la superficie di quelli soltanto i cui vertici insistono sulla iperbole determinata

al §. 28, per la quale ha luogo l'equazione

$$a^2(b^2+h^2)=b^2f^2$$

onde la formola della superficie diverrà

$$dS=\frac{d\varphi}{2}\sqrt{(b^2f^2+2ab^2f\text{sen}\varphi+(b^2f^2-e^2h^2)\text{sen}^2\varphi)}\,.$$

Per questi coni è sempre positivo il coefficiente di $\text{sen}^2\varphi$.

Principieremo qui coll'osservare che il trinomio sotto il vincolo radicale non può decomporsi in due fattori reali di primo grado; perchè posto ch'esso risulti del prodotto $(m+p\text{sen}\varphi)(m+q\text{sen}\varphi)$ troveremo

$$m=bf\ ,\quad p=ab\mp bh\sqrt{-1}\ ,\quad q=-ab\mp bh\sqrt{-1}\ ,$$

onde non può tenersi lo stesso metodo del paragrafo antecedente per la integrazione.

Quindi per maggiore semplicità supporremo che si principi a valutare la superficie dall'estremità dell'asse maggiore, e però nella formola generale porremo le coordinate circolari

$$x=a\cos\varphi\ ,\quad y=b\text{sen}\varphi$$

e per queste troveremo

$$dS=\frac{d\varphi}{2}\sqrt{(a^2(b^2+h^2)+2ab^2f\cos\varphi+(b^2f^2-e^2h^2)\cos^2\varphi)}$$

e per la condizione voluta

$$dS=\frac{d\varphi}{2}\sqrt{(b^2f^2+2ab^2f\cos\varphi+(b^2f^2-e^2h^2)\cos^2\varphi)}\ ,$$

ove procedendo come al §. 18 sarà

$$dS=\frac{d\varphi}{2}\sqrt{\left(2b^2f^2+2ab^2f-e^2h^2\right.}$$
$$\overline{\left.-4(ab^2f+b^2f^2-e^2h^2)\text{sen}^2\frac{\varphi}{2}+4(b^2f^2-e^2h^2)\text{sen}^4\frac{\varphi}{2}\right)}$$

e posto

$$2b^2f^2+2ab^2f-e^2h^2=\mathrm{A}\ ,\quad 4(ab^2f+b^2f^2-e^2h^2)=\mathrm{B}\ ,$$

$$4(b^2f^2-e^2h^2)=\mathrm{C}$$

risulta

$$d\mathrm{S}=\frac{d\varphi}{2}\sqrt{\left(\mathrm{A}-\mathrm{B}\,\mathrm{sen}^2\frac{\varphi}{2}+\mathrm{C}\,\mathrm{sen}^4\frac{\varphi}{2}\right)}$$

Se si pone

$$\mathrm{tang}\,\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{n}\,\mathrm{tang}\,\frac{\omega}{2}$$

si troverà

$$d\mathrm{S}=\frac{nd\omega}{[n^2+1-(1-n^2)\cos\omega]^2}$$

$$\times\sqrt{(\mathrm{A}(n^2+1)^2-\mathrm{B}(n^2+1)+\mathrm{C}+[\mathrm{A}(1-n^2)^2-\mathrm{B}(1-n^2)+\mathrm{C}]\cos^2\omega)}$$

ed

$$n^4=\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$$

ovvero

$$n^4=\frac{2b^2f^2-2ab^2f-e^2h^2}{2b^2f^2+2ab^2f-e^2h^2}=\frac{h^2+(f-a)^2}{h^2+(f+a)^2}=\frac{d'^2}{d^2}\ ,$$

essendo d', d la minima e la massima apotema, e perciò

$$\mathrm{A}=b^2d^2\ .$$

Quando sotto il vincolo radicale si ponga il valore del coseno dato pel seno si troveranno i coefficienti

$$2\mathrm{A}n^4+2(\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C})=4b^2d'^2$$

$$\mathrm{A}(1-n^2)^2-\mathrm{B}(1-n^2)+\mathrm{C}=4b^2d'^2\left(\tfrac{1}{2}-\frac{e^2h^2}{2b^2dd'}\right)$$

e così risulterà

$$d\mathrm{S}=\frac{2b(dd')^{\frac{3}{2}}}{(d+d')^2}\cdot\frac{\sqrt{[1-c^2\mathrm{sen}^2\omega]}}{(1-k\cos\omega)^2}\,d\omega$$

ove

$$c^2 = \tfrac{1}{2} - \frac{e^2h^2}{2b^2dd'}\,, \quad k = \frac{d-d'}{d+d'}\,.$$

Per integrare tale espressione principieremo col metterla sotto la seguente forma

$$dS = \frac{2b(dd')^{\frac{3}{2}}}{(d+d')^2}\,\frac{\Delta d\omega(1+k\cos\omega)^2}{(1-k^2\cos^2\omega)^2}$$

ovvero, fatto per comodo

$$M = \frac{2b(dd')^{\frac{3}{2}}}{(d+d')^2}$$

$$dS = Md\omega\left[\frac{(1+k^2-k\,\mathrm{sen}^2\omega)\Delta}{(1-k^2\cos^2\omega)^2} + \frac{2k\Delta\cos\omega}{(1-k^2\cos^2\omega)^2}\right]$$

e quindi ancora

$$dS = Md\omega\left[\frac{1+k^2}{(1-k^2)^2}\,\frac{(1-\lambda\,\mathrm{sen}^2\omega)\Delta}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\omega)^2} + \frac{2k}{(1-k^2)^2}\,\frac{\Delta\cos\omega}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\omega)^2}\right]$$

ove

$$\lambda = \frac{k^2}{1+k^2}\,, \quad n = \frac{k^2}{1-k^2}\,.$$

Ora abbiamo

$$\frac{d\omega(1-\lambda\,\mathrm{sen}^2\omega)\Delta}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\omega)^2} = \frac{\Delta d\omega}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\omega)^2} - \frac{\lambda\Delta d\omega\,\mathrm{sen}^2\omega}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\omega)^2}$$

e quindi

$$\frac{d\omega(1-\lambda\,\mathrm{sen}^2\omega)\Delta}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\omega)^2} = d\omega\left[\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)\frac{\Delta}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\omega)^2} - \frac{\lambda}{n}\,\frac{\Delta}{1+n\,\mathrm{sen}^2\omega}\right];$$

ma trovasi

$$\frac{\Delta}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\omega)^2} = \left(1+\frac{c^2}{n}\right)\frac{1}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\omega)^2\Delta} - \frac{c^2}{n}\cdot\frac{1}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\omega)\Delta}$$

$$\frac{\Delta}{1+n\,\mathrm{sen}^2\omega} = \left(1+\frac{c^2}{n}\right)\frac{1}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\omega)\Delta} - \frac{c^2}{n}\,\frac{1}{\Delta}$$

i quali valori sostituiti nell'antecedente espressione avremo

$$\frac{d\omega(1-\lambda\text{sen}^2\omega)\Delta}{(1+n\text{sen}^2\omega)^2}=\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)\left(1+\frac{c^2}{n}\right)\frac{d\omega}{(1+n\text{sen}^2\omega)^2\Delta}$$

$$-\left(\frac{c^2}{n}+\frac{2\lambda c^2}{n^2}+\frac{\lambda}{n}\right)\frac{d\omega}{(1+n\text{sen}^2\omega)\Delta}+\frac{\lambda c^2}{n^2}\cdot\frac{d\omega}{\Delta}.$$

Per quanto esponemmo al §. 35 essendo

$$\frac{d\omega}{(1+n\text{sen}^2\omega)^2\Delta}=\frac{1}{C}\,d.\frac{\Delta\text{sen}\omega\cos\omega}{1+n\text{sen}^2\omega}-\frac{A(n+c^2)}{Cc^2}\cdot\frac{d\omega}{\Delta}$$

$$+\frac{An}{Cc^2}\Delta d\omega-\frac{B}{C}\cdot\frac{d\omega}{(1+n\text{sen}^2\omega)\Delta}$$

ove

$$A=\frac{c^2}{n^2},\quad B=\frac{1}{n}(c^2-2+n),\quad C=2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{c^2}{n}\right).$$

Fatto pertanto

$$D=\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)\left(1+\frac{c^2}{n}\right),\quad L=\frac{c^2}{n}+\frac{2\lambda c^2}{n^2}+\frac{\lambda}{n}$$

sostituendo otterremo

$$dS=M\,\frac{1+k^2}{(1-k^2)^2}\,.$$

$$\times\left[\frac{D}{C}\,d.\frac{\Delta\text{sen}\omega\cos\omega}{1+n\text{sen}^2\omega}+\left(\frac{\lambda c^2}{n^2}-\frac{AD(n+c^2)}{Cc^2}\right)\frac{d\omega}{\Delta}+\frac{An}{Cc^2}\Delta d\omega\right.$$

$$\left.-\left(\frac{BD}{C}+L\right)\frac{d\omega}{(1+n\text{sen}^2\omega)\Delta}\right]+\frac{2Mk}{(1-k^2)^2}\,\frac{\Delta d\omega\cos\omega}{(1+n\text{sen}^2\omega)^2}.$$

Per la integrazione dell'ultimo termine porremo

$$\frac{\text{sen}\omega}{\Delta}=m\tan\!g\theta,$$

essendo θ una nuova variabile ed m una quantità da determinarsi, avremo

$$\mathrm{sen}^2\omega = \frac{m^2\mathrm{tang}^2\theta}{1+m^2c^2\mathrm{tang}^2\theta}$$

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{(1+m^2c^2\mathrm{tang}^2\theta)}}$$

$$1+n\mathrm{sen}^2\omega = \frac{1+m^2(c^2+n^2)\mathrm{tang}^2\theta}{1+m^2c^2\mathrm{tang}^2\theta}$$

$$\Delta d\omega\cos\omega = \frac{md\theta}{\cos^2\theta}\,\Delta^4\,,$$

e quindi sostituendo sarà

$$\frac{\Delta d\omega\cos\omega}{(1+n\mathrm{sen}^2\omega)^2} = \frac{md\theta}{\cos^2\theta(1+m^2(c^2+n^2)\mathrm{tang}^2\theta)^2}\,.$$

E per determinare la m si ponga

$$m^2(c^2+n^2)=1, \quad \text{ed} \quad m = \frac{1}{\sqrt{(c^2+n^2)}}\,,$$

e così avremo facilmente

$$\frac{\Delta d\omega\cos\omega}{(1+n\mathrm{sen}^2\omega)^2} = \frac{1}{2\sqrt{(c^2+n^2)}}\,d.(\mathrm{sen}\theta\cos\theta+\theta)\,,$$

il quale valore sostituito nella formola che dà la superficie otterremo

$$dS = \mathrm{M}\,\frac{1+k^2}{(1-k^2)^2}$$

$$\times\left[\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}\,d.\,\frac{\Delta\mathrm{sen}\omega\cos\omega}{1+n\mathrm{sen}^2\omega}+\left(\frac{\lambda c^2}{n^2}-\frac{\mathrm{AD}(c^2+n)}{\mathrm{C}c^2}\right)\frac{d\omega}{\Delta}+\frac{\mathrm{A}n}{\mathrm{C}c^2}\,\Delta d\omega\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{C}}+\mathrm{L}\right)\frac{d\omega}{(1+n\mathrm{sen}^2\omega)\Delta}\right]+\frac{\mathrm{M}k}{(1-k^2)^2\sqrt{(c^2+n^2)}}\,d.\,(\mathrm{sen}\theta\cos\theta+\theta)$$

dalla quale rileviamo che in fine la superficie dipende dalle funzioni ellettiche di prima e seconda specie.

37. Anzi che considerare ora i coni a doppia obliquità passeremo ad assegnare la superficie dei cono-cunei retti.

Ed a questo fine (fig. 3ª) s' immagini sul piano XY una curva qualunque di equazione,

$$y' = f(x) \ ,$$

essendo in O l'origine degli assi coordinati ortogonali.

Sul piano ZX si concepisca una retta parallela all' asse delle x, e sia $OC = m$ la sua equazione. Facciamo quindi che un piano scorra lungo le x conservandosi sempre parallelo all'altro ZY: tale piano continuamente intersecherà, la curva BMA, e la retta CD, onde congiunti tutti questi punti ne risulterà una superficie della quale se ne dimanda il valore.

38. Daremo intanto l'equazione alla superficie; pel che dette x, y, z le coordinate di un punto qualunque S preso sulla generatrice MN avremo

$$\frac{PN}{PM} = \frac{QS}{QM} = \frac{QS}{PM - PQ'}$$

dalla quale

$$\frac{m}{f(x)} = \frac{z}{f(x) - y} \ ;$$

e quindi

$$(1) \qquad m - z = \frac{my}{f(x)} \ ;$$

dalla quale risulta che la superficie sarà di second'ordine tutte le volte che $f(x)$ sia di primo grado, e razionale. Di essa equazione si dovrebbe fare uso quando per la quadratura di tali superficie si volesse partire dalla formola generale

$$d^2S = dxdy \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]} \ .$$

Noi peraltro, a simiglianza di quanto abbiamo fatto pei coni comuni, procureremo stabilire una formola per la specie delle superficie che trattiamo e che potrà ritenersi almeno come approssimativa.

39. Immaginiamo quindi condotta un altra generatrice mn infinitamente prossima alla MN. Il quadrilatero MNmn non trovasi in un solo piano, e perciò intendiamo condotta la diagonale Nm con che avremo due triangoli, l'uno dei quali MNm possiamo considerarlo nel piano tangente che passa per la generatrice MN e la tangente MT, e l'altro rettangolo Nmn.

Per avere l' altezza del triangolo MNm immagineremo condotta la PT normale alla tangente, onde la NT risulta normale ad MT, e quindi designata per dS la superficie elementare sarà

$$dS = \frac{Mm \times NT}{2} + \frac{Nn \times mn}{2}$$

ovvero, tenendo conto dei soli infinitesimi del prim'ordine

$$dS = \frac{Mm \times NT}{2} + \frac{Nn \times MN}{2}.$$

Per avere la NT avvertiremo che dessa è la perpendicolare calata dal punto

$$y = 0\ ,\quad x$$

sulla tangente la direttrice nel punto x, y, l' equazione della quale è

$$Y = \frac{dy}{dx} X + \frac{ydx - xdy}{dx}$$

onde

$$PT = -\frac{ydx}{ds}$$

e quindi

$$NT = \frac{\sqrt{(m^2 ds^2 + y^2 dx^2)}}{ds},$$

e perciò

$$(2)\qquad dS = \tfrac{1}{2}\sqrt{(m^2 ds^2 + y^2 dx^2)} + \tfrac{1}{2} dx \sqrt{(m^2 + y^2)}$$

A questa formola si potrebbe ancora giungere considerando il triangolo MNm quale settore di raggio MN, e di arco

$$\sqrt{[ds^2-(d.\mathrm{MN})^2]}\ .$$

Se nella (2) poniamo $m=0$, risulta

$$d\mathrm{S}=ydx$$

cioè la nota formola per la quadratura delle superficie piane.

40. Supponiamo ora che sia una ellisse la linea direttrice, e la sua equazione venga rappresentata dalle due

$$x=a\mathrm{sen}\varphi\ ,\quad y=b\cos\varphi$$

troveremo

$$(a)\left\{\begin{aligned} d\mathrm{S}=&\frac{ad\varphi\cos\varphi}{2}\sqrt{(b^2+m^2-b^2\mathrm{sen}^2\varphi)}\\ &+\frac{d\varphi}{2}\sqrt{(b^2m^2+(a^2m^2-b^2m^2)\cos^2\varphi+a^2b^2\cos^4\varphi)}\end{aligned}\right.$$

la quale dovrà integrarsi fra i limiti

$$\varphi=0\ ,\quad \varphi=\frac{\pi}{2}$$

per avere la quarta parte delle superficie.

Poniamo ora per comodo

$$(b)\qquad \mathrm{S}_1=\frac{a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\cos\varphi\sqrt{(b^2+m^2-b^2\mathrm{sen}^2\varphi)}$$

$$(c)\qquad \mathrm{S}_2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sqrt{(b^2m^2+e^2m^2\cos^2\varphi+a^2b^2\cos^4\varphi)}$$

e

$$b^2+m^2=\beta^2$$

Onde integrare la (b) avvertiremo essere

$$\int d\varphi\cos\varphi\sqrt{(\beta^2-b^2\text{sen}^2\varphi)}=\beta^2\int\frac{d\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(\beta^2-b^2\text{sen}^2\varphi)}}$$

$$+\int\frac{-b^2d\varphi\text{sen}^2\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(\beta^2-b^2\text{sen}^2\varphi)}}$$

e quindi integrato per parti il secondo termine, troveremo

$$\int d\varphi\cos\varphi\sqrt{(\beta^2-b^2\text{sen}^2\varphi)}=\frac{\beta^2}{2b}\text{Arc.sen}\left(=\frac{b}{\beta}\text{sen}\varphi\right)$$

$$+\frac{\text{sen}\varphi}{2}\sqrt{(\beta^2-b^2\text{sen}^2\varphi)}$$

da cui

$$(d)\qquad S_1=\frac{a\beta^2}{4b}\text{Arc.sen}\left(=\frac{b}{\beta}\right)+\frac{am}{4}$$

Per integrare poi la espressione (c) supporremo

$$\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}$$

onde ai limiti

$$\varphi=0,\ \varphi=\frac{\pi}{2}$$

corrisponderanno

$$\omega=\pi\ ,\quad \omega=0\ ,$$

e così invertendo i limiti sarà

$$(e)\quad S_2=\int_0^\pi\frac{d\omega}{4}\sqrt{\left(b^2m^2+e^2m^2\text{sen}^2\frac{\omega}{2}+a^2b^2\text{sen}^4\frac{\omega}{2}\right)}$$

Si ponga quindi

$$\text{tang}\frac{\omega}{2}=\frac{1}{n}\text{tang}\frac{\alpha}{2}$$

conservandosi per α i medesimi limiti che per ω ed avremo

$$\text{sen}^2\omega=\frac{1-\cos\alpha}{n^2+1-(1-n^2)\cos\alpha}$$

$$d\omega = \frac{2nd\alpha}{n^2+1-(1-n^2)\cos\alpha}$$

le quali espressioni sostituite nella (e) ci danno

$$S_2 = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \frac{nd\alpha}{[n^2+1-(1-n^2)\cos\alpha]^2}$$

$$\times\sqrt{[b^2m^2[n^2+1-(1-n^2)\cos\alpha]^2+e^2m^2(1-\cos\alpha)[n^2+1-(1-n^2)\cos\alpha]}$$
$$\overline{+a^2b^2(1-\cos\alpha)^2]}$$

e per la condizione onde determinare la n, otterremo

$$(f)\quad S_2 = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \frac{nda}{[n^2+1-(1-n^2)\cos\alpha]^2}\sqrt{(A+B\cos^2\alpha)}$$

$$2b^2m^2(1-n^4)+e^2m^2(1-n^2)+e^2m^2(1+n^2)+2a^2b^2=0$$

ove

$$A=b^2m^2(n^2+1)^2+e^2m^2(n^2+1)+a^2b^2$$

$$B=b^2m^2(1-n^2)^2+e^2m^2(1-n^2)+a^2b^2$$

Dalla seconda delle (f) deduciamo

$$n^2 = \frac{a\beta}{bm}$$

e perchè $\beta=\sqrt{(b^2+m^2)}$, risulta $n^2>1$.

La prima delle (f) si muta in

$$S_2 = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \frac{nd\alpha}{[n^2+1+(n^2-1)\cos\alpha]^2}\sqrt{(A+B-B\operatorname{sen}^2\alpha)}$$

ma

$$A+B=4a^2\beta^2$$

$$B=4a^2\beta^2\left(\tfrac{1}{2}-\frac{m(a^2+b^2)}{4ab\beta}\right)$$

e perciò

$$S_2 = \frac{n}{2(n^2+1)^2}\int_0^\pi \frac{d\alpha}{(1+k\cos\alpha)^2}$$

$$\times\sqrt{\left(4a^2\beta^2 - 4a^2\beta^2\left(\tfrac{1}{2} - \frac{m(a^2+b^2)}{4ab\beta}\right)\mathrm{sen}^2\alpha\right)}$$

essendo per comodo

$$k = \frac{n^2-1}{n^2+1}.$$

Il coefficiente di $\mathrm{sen}^2\alpha$ può dar luogo a tre ipotesi, mentre è indeterminata l'altezza del cono-cuneo.

41. Sia primieramente

$$\frac{m(a^2+b^2)}{4ab\beta} = \tfrac{1}{2},$$

da cui

$$m = \frac{2ab^2}{e^2}$$

e quindi

$$S_2 = \frac{a\beta n}{(n^2+1)^2}\int_0^\pi \frac{d\alpha}{(1+k\cos\alpha)^2}$$

Per integrare questa espressione si assuma

$$d.\frac{\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha}{1+k\cos\alpha} = d\alpha\left[\frac{2\cos^2\alpha - 1}{1+k\cos\alpha} + \frac{k\,\mathrm{sen}^2\alpha\cos\alpha}{(1+k\cos\alpha)^2}\right].$$

Si faccia ora

$$1 + k\cos\alpha = u$$

e pel coefficiente di $d\alpha$ troveremo

$$\frac{2(u-1)^2-k^2}{k^2u} + \frac{(u-1)(k^2-(u-1)^2)}{k^2u^2} = \frac{u^3-u^2-u+1-k^2}{k^2u^2}$$

ovvero

$$\frac{1}{k^2}(u-1) - \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{u} + \frac{1-k^2}{k^2}\cdot\frac{1}{u^2},$$

ove posto nuovamente per u il suo valore sarà

$$d.\frac{\text{sen}\alpha\cos\alpha}{1+k\cos\alpha}=\frac{1}{k^2}\cdot kd\alpha\cos\alpha-\frac{1}{k^2}\frac{d\alpha}{1+k\cos\alpha}+\frac{1-k^2}{k^2}\cdot\frac{d\alpha}{(1+k\cos\alpha)^2}$$

da cui, essendo $k<1$

$$\int_0^\pi\frac{d\alpha}{(1+k\cos\alpha)^2}=\int_0^\pi\frac{d\alpha}{1+k\cos\alpha}=\frac{2}{(1-k^2)\sqrt{(1-k^2)}}\cdot\frac{\pi}{2}\ .$$

e quindi

$$S_2=\frac{a\beta n}{(n^2+1)^2}\cdot\frac{2}{(1-k^2)\sqrt{(1-k^2)}}\cdot\frac{\pi}{2}\ .$$

Ma per essere

$$k=\frac{n^2+1}{n^2-1}$$

è

$$(1-k^2)\sqrt{(1-k^2)}=\frac{8n^3}{(n+1)^3}$$

ed

$$S_2=\frac{a\beta(a\beta+bm)}{4bm}\cdot\frac{\pi}{2},$$

la superficie cercata sarà

$$(g)\qquad S=\frac{a\beta}{4b}\ \text{Arc.sen}\left(=\frac{b}{\beta}\right)+\frac{am}{4}+\frac{a\beta(a\beta+bm)}{4bm}\cdot\frac{\pi}{2}:$$

Sia in secondo luogo

$$\frac{1}{2}>\frac{m(a^2+b^2)}{4ab\beta},$$

e si ponga

$$\frac{1}{2}-\frac{m(a^2+b^2)}{4ab\beta}=c^2$$

essendo $c<1$, avremo

$$S_2 = \frac{a\beta n}{(n^2+1)}\int_0^\pi \frac{d\alpha}{(1+k\cos\alpha)^2}\sqrt{(1-c^2\mathrm{sen}^2\alpha)}$$

la quale per essere della stessa forma dell'espressione integrata al §. 36 concluderemo che la superficie dimandata dipende dalle funzioni ellittiche di prima e seconda specie.

Sia in terzo luogo

$$\frac{1}{2} < \frac{m(a^2+b^2)}{4ab\beta};$$

la c^2 risultando negativa il radicale diverrà

$$\sqrt{(1+c^2\mathrm{sen}^2\alpha)};$$

ma fatto

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$$

abbiamo

$$\sqrt{(1+c^2\mathrm{sen}^2\alpha)} = \sqrt{(1+c^2)}\sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{1+c^2}\mathrm{sen}^2\theta\right)}$$

onde permutando i limiti, e ponendo

$$c'^2 = \frac{c^2}{1+c^2}$$

sarà

$$S_2 = \frac{a\beta n\sqrt{(1+c^2)}}{(n^2+1)^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+k\,\mathrm{sen}\theta)^2}\sqrt{(1-c'^2\mathrm{sen}^2\theta)}$$

la quale dipende dalle funzioni ellittiche di prima e seconda specie.

42. Se la base del cono-cuneo fosse un circolo, la S_1 non muta, e nella S_2 essendo allora $e=0$, avremo, dicendo r il raggio

$$S=\frac{r}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\cos\varphi\sqrt{(r^2+m^2-r^2\mathrm{sen}^2\varphi)}+\frac{r}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sqrt{(m^2+r^2\cos^4\varphi)}$$

ovvero

$$S=\frac{r}{4}\left[\frac{\beta^2}{r}\mathrm{Arc.sen}\left(=\frac{r}{\beta}\right)+m\right]+\frac{r}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sqrt{(m^2+r^2\cos^4\varphi)}$$

e praticate pel secondo termine del secondo membro le medesime sostituzioni che pel caso della base ellittica, troveremo

$$S_2=\frac{r}{2}\int_0^{\pi}\frac{nd\alpha}{[n^2+1+(n^2-1)\cos\alpha]^2}\sqrt{(A+B-B\mathrm{sen}^2\alpha)}$$

ove

$$A+B=4\beta^2$$

$$B=4\beta^2\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{2\beta}\right)$$

e fatto

$$\frac{1}{2}-\frac{m}{2\beta}=c^2$$

sarà

$$S_2=\frac{\beta nr}{(n^2+1)^2}\int_0^{\pi}\frac{d\alpha}{(1+k\cos\alpha)^2}\sqrt{(1-c^2\mathrm{sen}^2\alpha)}$$

ove c^2 mai può diventare eguale a zero o all'unità, nè può essere negativo.

Da questa formola risulta che anche la superficie del conocuneo, lor quando la curva direttrice è una circonferenza, dipende dalle funzioni ellittiche di prima e seconda specie.

43. Se nella (a) si suppone $b=0$, la superficie si riduce ad un rettangolo sul piano ZX di base a e di altezza m, e si ha

$$dS=amd\varphi\cos\varphi$$

la quale integrata fra i limiti 0, e $\frac{\pi}{2}$ risulta

$$S = am \ .$$

Se poi nella medesima (a) si fa $a = 0$, la superficie si riduce ad un triangolo posto sul piano ZY di base b, e di altezza m, e si ha

$$dS = \frac{bm}{2} d\varphi \text{sen}\varphi$$

e quindi

$$S = \frac{bm}{2} .$$

come deve essere

44. Passiamo ora ad assegnare la superficie dei cilindri obliqui, dei quali si conosca la lunghezza dell'asse, e l'angolo della inclinazione di questo.

Sia perciò fig. 4.ª AMB una linea direttrice riferita agli assi ortogonali CX, CY, e data dall'equazione

$$y = f(x) \ .$$

Sia CD $= a =$ MN la lunghezza dell'asse del cilindro.

Preso $Mm = ds$, e condotta la tangente MT, si concepisca una generatrice mn infinitamente prossima ad MN: sarà MNnm l'elemento della superficie cilindrica, che potremo risguardare quale parallelogrammo: onde

$$(1) \qquad dS = Mm \times MN\text{sen}NML \ .$$

Ora da N calata la perpendicolare Nl sulla MR parallela all'asse delle ascisse, ed Ll perpendicolare sulla tangente, avremo evidentemente

$$ML = MN\cos NML$$

$$ML = Ml\cos\varphi \ , \quad Ml = MN\cos\theta$$

dalle quali

$$\cos NML = \cos\theta\cos\varphi$$

e

$$\operatorname{sen} NML = \sqrt{(1 - \cos^2\varphi\cos^2\theta)} .$$

Quindi la (1) si muta in

$$dS = ads\sqrt{(1 - \cos^2\varphi\cos^2\theta)} ;$$

ma essendo

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

sarà

$$\cos^2\varphi = \frac{dx^2}{ds^2} = \frac{1}{1 + f'(x)^2}$$

e

$$dS = ads\sqrt{\left(1 - \cos^2\theta . \frac{dx^2}{ds^2}\right)}$$

ed ancora

$$dS = a\sqrt{(ds^2 - dx^2\cos^2\theta)} = adx\sqrt{[f'(x)^2 + \operatorname{sen}^2\theta)} ,$$

e volendo eliminare $\operatorname{sen}\theta$ si dica h l'altezza del cilindro, e si avrà

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{a}$$

e così

$$(2) \qquad dS = dx\sqrt{[a^2f'(x)^2 + h^2]} .$$

45. Supponiamo che sia un circolo la base del cilindro obliquo, avremo

$$x^2 + y^2 = r^2$$

e di qui

$$f'(x) = -\frac{x}{y}$$

onde la (2) si muta in

$$dS = dx\sqrt{\left(\frac{a^2x^2+h^2y^2}{y^2}\right)}.$$

Ma se per maggior semplicità facciamo

$$x = r\mathrm{sen}\varphi$$

avremo facilmente

$$S = \int r d\varphi \sqrt{[h^2+(a^2-h^2)\mathrm{sen}^2\varphi]} + \mathrm{Cost.}^e$$

la quale integrata fra i limiti $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ duplicato l'integrale, e posto il coseno, per la cercata superficie avremo

$$S = 2r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{(a^2-(a^2-h^2)\cos^2\varphi)}$$

ove la quantità da integrarsi rappresenta il semiperimetro di una ellisse di semi-assi a, h. Di qui il seguente :

Teorema. *La superficie di un cilindro obliquo a base circolare è equivalente ad un rettangolo un lato del quale sia il diametro del circolo base, e l'altro il semi-perimetro di una ellisse che abbia per semi-assi l'altezza del cilindro, e l'asse del medesimo.*

Se $h=a$, nel qual caso il cilindro è retto, abbiamo

$$S = 2\pi ra .$$

46. Sia un cilindro obliquo a base ellittica, avremo

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 ,$$

ed essendo

$$f'(x) = -\frac{B^2x}{A^2y}$$

risulterà

$$S = \int dx \sqrt{\left(\frac{B^4a^2x^2 + A^4h^2y^2}{A^2B^2(A^2 - x^2)}\right)} + \text{Cost.}^e$$

ed ancora

$$S = \int dx \sqrt{\left(\frac{(B^2a^2 - A^2h^2)x^2 + A^4h^2}{A^2(A^2 - x^2)}\right)} + \text{Cost.}^e$$

nella quale fatto

$$x = A \cos \varphi$$

sarà per la superficie totale

$$S = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ad\varphi \sqrt{\left[A^2 \frac{h^2}{a^2} + \left(B^2 - A^2 \frac{h^2}{a^2}\right) \cos^2\varphi\right]}$$

ed essendo

$$h = a \operatorname{sen} \theta$$

sarà

$$S = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ad\varphi \sqrt{(A^2 \operatorname{sen}^2\theta - (A^2 \operatorname{sen}^2\theta - B^2)\cos^2\varphi)}$$

ove hanno luogo le seguenti ipotesi

$$A^2\operatorname{sen}^2\theta > B^2,\ A^2\operatorname{sen}^2\theta = B^2$$
$$A^2\operatorname{sen}^2\theta < B^2 .$$

Per la prima abbiamo

$$S = 2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{(A^2 \operatorname{sen}^2\theta - (A^2 \operatorname{sen}^2\theta - B^2)\cos^2\varphi)}$$

onde il seguente

Teorema. *La superficie di un cilindro obliquo a base ellittica equivale alla superficie di un rettangolo che abbia per*

altezza la lunghezza dell'asse del cilindro, e per base il perimetro di una ellisse di semi-assi A$\operatorname{sen}\theta$, B.

Nella seconda ipotesi abbiamo

$$S = 2Aa\pi \operatorname{sen}\theta = 2\pi B a$$

è però il seguente

Teorema. *Quando la base del cilindro obliquo è determinata da una ellisse di equazione*

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 \operatorname{sen}^2\theta} = 1$$

la sua superficie equivale a quella di un cilindro retto che abbia per base il circolo di raggio B = A$\operatorname{sen}\theta$, *e per altezza la lunghezza dell'asse del cilindro.*

Nella terza ipotesi la superficie del cilindro verrà rappresentata dalla formola

$$S = 2a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{[A^2 \operatorname{sen}^2\theta + (B^2 - A^2 \operatorname{sen}^2\theta)\cos^2\varphi]}$$

ovvero fatto

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

avvertendo ai nuovi limiti, 0, π

$$S = 2a \int_0^\pi d\alpha \sqrt{\left(B^2 - (B^2 - A^2 \operatorname{sen}^2\theta)\cos^2\alpha\right)}$$

cioè il

Teorema: *La superficie del cilindro obliquo quando*

$$B^2 > A^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

è equivalente ad un rettangolo di altezza a e di base il perimetro dell'ellisse di semi-asse B, A$\operatorname{sen}\theta$.

Se nella formola

$$S=2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{\left(A^2 \text{sen}^2\theta-(A^2\text{sen}^2\theta-B^2)\cos^2\varphi\right)}$$

supponiamo

$$\theta=\frac{\pi}{2}$$

ossia il cilindro retto, avremo

$$S=2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{(A^2-(A^2-B^2)\cos^2\varphi)}$$

cioè la superficie del cilindro retto a base ellittica.

47. Sia la direttrice una parabola

$$y^2=2px$$

si avrà

$$f'(x)=\frac{p}{y}=\frac{p}{\sqrt{(2px)}}$$

onde la (2) si muta in

$$S=h\int_0^x dx \sqrt{\left(1+\frac{a^2p}{h^2}\cdot\frac{1}{2x}\right)}$$

onde il

Teorema. *La superficie di un cilindro obliquo che abbia per base una parabola di equazione*

$$y^2=2px$$

equivale ad un rettangolo di altezza eguale a quella del cilindro, e di base eguale all' arco di una parabola di parametro $\frac{2a^2p}{h^2}$.

Se il cilindro divenga retto, essendo $h=a$ sarà

$$S = a\int_0^x dx \sqrt{\left(1 + \frac{p}{2x}\right)}.$$

48. Sia finalmente

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$

l'equazione della iperbole direttrice, essendo in tale ipotesi

$$f'(x) = \frac{B^2x}{A^2y}$$

la (2) si cangia in

$$S = \int dx \sqrt{\left(\frac{B^4a^2x^2}{A^4y^2} + h^2\right)} + \text{Cost.}^e$$

e perchè

$$A^2y^2 = B^2(x^2 - A^2)$$

sarà

$$S = \int dx \sqrt{\left[\frac{(B^2a^2 + A^2h^2)x^2 - A^4h^2}{A^2(x^2 - A^2)}\right]} + \text{Cost.}^e$$

nella quale fatto

$$x = \frac{A}{\cos\varphi}$$

risulta facilmente

$$S = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \sqrt{[(B^2a^2 + A^2h^2) - A^2h^2\cos^2\varphi)]}$$

e perchè

$$h = a\,\text{sen}\,\theta$$

sarà

$$S = a\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \sqrt{[(B^2 + A^2\text{sen}^2\theta) - A^2\text{sen}^2\theta\cos^2\varphi]}$$

onde il

Teorema. *La superficie di un cilindro obliquo iperbolico*

equivale ad un rettangolo di altezza eguale all' asse del cilindro, e di base eguale all'arco di una iperbole di semi-assi B, A senθ, *la quale si muta nella proposta quando* $\theta = \frac{\pi}{2}$, *ovvero lorchè il cilindro è retto.*

NUOVE PUBBLICAZIONI DEL PRINCIPE BONCOMPAGNI.

Questo illustre erudito non cessa di raccogliere e donare alla pubblicità documenti valevoli a rischiare la storia della matematica. Ha non è guari impresa una collezione d'antichi *Trattati d' aritmetica* , tuttora inediti , da lui rinvenuti manoscritti in varie biblioteche (1). Il primo di essi è tolto da un codice membranaceo contrassegnato *Ii.* 6. 5 che serbasi nella Biblioteca dell'Università di Cambridge, ed è intitolato *Algoritmi de numero Indorum*. Contiene questo le regole della numerazione scritta secondo la dottrina indiana, quelle dell'addizione e sottrazione, della mediazione e duplicazione, della multiplicazione e divisione con la prova che sogliam dire del nove, tutto ciò sopra numeri interi; poscia propone di trattare *de multiplicatione fractionum et earum divisione et de extractione radicum*, e insegna a scrivere, moltiplicare e dividere le frazioni sessagesimali, ma s'interrompe e s'arresta ove s'accinge a dichiarare il calcolo degli altri numeri rotti. Alla sposizione de' principj si trovano più volte o premesse o frapposte le parole *dixit Algorithmi, inquit algorismi*, per le quali si appalesa che Algoritmi o Algorismi indica l'autore d'un libro di cui questo è la traduzione o meglio un estratto : anzi non si può dubitare che esso sia il Matematico Mohammed ben Musa, vivuto nel principio del nono secolo e chiamato *Al-*

(1) *Trattati d'aritmetica pubblicati da Baldassarre Boncompagni*. Roma, Tipografia delle scienze fisiche e matematiche, in Via Lata N.° 211. 1857.

Kharizmi da *Kharizm* o *Chowaresm* suo paese nativo (1). A prova d'una tale identità rechiamo le seguenti parole che si leggono in quel trattato (pag. 2, lin. 3—6): « Et iam patefeci in libro algebre et almucabalah, idest restaurationis et oppositionis, quod uniuersus numerus sit compositus, et quod universus numerus componatur super unum». La quale allusione si confà perfettamente al *Compendio del modo di calcolare per algebra e almucabala* scritto da Mohammed ben Musa Alkharizmi, dove, secondo la traduzione inglese di Federico Rosen, è detto: « I also observed that every number is composed of units, anh that any number may be divided into units» (2). Un'altra volta si allude al medesimo *Compendio* nel trattato *Algoritmi de numero Indorum*, pag. 10, lin. 20—22, come segue: « Etiam patefeci in libro, quod necesse est omni numero qui multiplicatur in aliquo quolibet, ut duplicetur unus ex eis secundum unitates alterius »; e a ciò risponde in effetto un passo del Compendio così tradotto dal Rosen: Whenever one number is to be multiplied by another, the one must be repeated as many times as the other contains

(1) *Kharizm* ou *Khovaresm*, pays des *Chorasmiens*, région du Turkestan occid., au sud de la mer d'Aral,, sur les deux rives du Djihoun, entre le khanat de Boukhara et la mer Caspienne; contient, entre autres territoires, le khanat de Khiva et le pays des Turcomans » *Dictionnaire universel d'Histoire et de Gèographie. Par M.—N. Bouillet, conseiller honoraire de l'Universitè, inspecteur de l'Acadèmie de Paris, officier de la Lègion d'honneur, membre de l'ordre de Charles III. d'Espagne, etc. Ouvrage approuvè par le Conseil de l'Universitè et par Mgr. l'Archevêque de Paris. Nouvelle èdition, (onzième) revue, corrigèe et autorisèe par le Saint-siège, et augmentèe d'un nouveau supplèment. Paris, Librairie de L. Hachette et C.ie Rue Pierre-Sarrazin*, n.o 14. (*Près de l'École de mèdecine*), 1856; pag. 957, col. 1).

(2) *The Algebra of Mohammed ben Musa. Edited and translated by Frederic Rosen.* Londra 1831, pag. 5, lin. 7—8.

eunits » (1). Manifestamente al luogo citato il vocabolo *duplicetur* sta per *multiplicetur*.

Si dimostra adunque per l'opuscolo pubblicato dal principe Boncompagni che Mohammed compose oltre al trattato d'algebra anche un libro sopra il metodo indiano di numerazione, onde non incongruamente potè da lui derivare il nome di *Algorismus* o *Algoritmus* dato nel medio evo alla nuova aritmetica, secondo che congbietturò il signor Reinaud (2). Anzi è da credere che eziandio la voce *Algus* usata in alcuni codici e stampati pel nome del filosofo che insegnò quell'aritmetica, sia stata solo per abbrevazione o errore sostitùita a quella di *Algorismus*: così il Tartaglia affermò e ripetè il signor Chasles (3) che Giovanni Sacrobosco chiama *Algo* il filosofo dal cui nome l'aritmetica pratica fu detta Algorismo, e tale è la lezione di qualche edizione del trattato scritto dal Sacroboseo, ma in quella che fece il Clichtovée con la data di Parigi 1503, si legge: « scentiam numerandi compendiosam philosophus edidit nomine Algorismus: unde et Algorismus nuncupatur vel ars numerandi . . . » (4).

---

(1) Ivi, pag. 21, lin. 13—15.

(2) *Mèmoires de l'Institut National de France, Acadèmie des Inscriptions et Belles-Lettres, Tome XVIII*, pag. 303—304. Non so peraltro con quale fondamento il sign. Reinaud ivi asseverasse che furono gli scritti di Mohammed quelli che tradotti in latino divulgarono in Occidente la notizia della numerazione indiana. Il Peacok (*Arithmetic*, art. 67) dice stabilita per comune consenso degli autori arabi l'opinione, ch'egli sia stato il primo a scrivere sopra l'algebra e la numerazione indiana, ma sembra che scambi il nostro Mohammed con *Abu Safar Mohammed ben Musa* che fiorì alla fine del nono secolo. V. la citata traduzione del Rosen, Prefazione, pag. xi e xii.

(3) Tartaglia, *La prima parte del general trattato di numeri et misure*. Venezia 1556, carta 3, *recto*. — Chasles, *Aperçu historique* ecc., pag. 528 in nota.

(4) Trovasi nel fol. xlv *recto* d'una raccolta d'opere di aritmetica, geometria, prospettiva, astronomia. Nel fol. xlviij *recto* si legge:

L'Algebra di Mohammed è nota anche per una traduzione latina che fu pubblicata da Guglielmo Libri e della quale si conoscono undici esemplari manoscritti (1). Alcuni di

---

Opusculi de praxi numerorum quod Algorismum vocant finis; e appiedi: *Absolutum in almo Parhisiorum studio* | *Anno dni qui numero definivit omnia* 1503. Nel fol. xxxiij v'ha una dedicatoria di *Iudocus Clichtoveus Neoportuensis*. — Torna qui opportuno di avvertire che è questo l'*Algorismo* a cui accennava lo Chasles nel suo *Aperçu* pag. 559 dicendovi insegnata una divisione de' numeri in gruppi di quattro figure; e che all'incontro vi è prescritta la separazione delle figure di tre in tre, come prova il passo riferito dal Boncompagni (*Notizie intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano*, Roma, 1854, pag. 369), e come lo stesso Chasles sembra aver poscia riconosciuto attribuendo al Sacrobosco nei *Comptes rendus*, tom. XVI, pag. 1402, una tale separazione.

(1) Stimo far cosa grata ai matematici eruditi dando una nota degli esemplari sopraccitati, che debbo alla gentilezza del principe Boncompagni:

1. Biblioteca Imperiale di Parigi, codice contrassegnato, *Supplément latin*, *n.* 49 (carta 110 *verso*, col, 2., lin. 1 — carta 116 *verso*, col. 1, lin. 30);
2. Ib. codice contrassegnato *Rèsidu S.t Germain* 15 (*olim paquet* 2, *n*, 7), carta 1 *recto*, lin. 1 — carta 18 *verso*, lin. 2);
3. Ib. codice contrassegnato, *Ancien fonds Latin*, *n.o* 7377 A (carta 34 *recto*, lin. 1 — carta 43 *verso*, lin. 7);
4. Ib. codice contrassegnato *Fonds Français*, *n.o* 8110 (carta 226 *recto*, lin. 2 — carta 247 *verso*, lin. 22);
5. Biblioteca dell'Università di Cambridge, codice contrassegnato *Mm.* 2. 18, *Ioannis Mori Epi. Norvicensis* *n.o* 9260 (carta 65 *recto*, col. 2, lin. 13 — carta 69 *verso*, col. 2, lin. 34);
6. Biblioteca Ambrosiana di Milano, codice contrassegnato *A.* 183. *Parte Inferiore* (carta 115 *recto*, col. 1, lin. 1. — carta 120 *recto*, col. 1, lin. 31);
7. Ib. codice contrassegnato *P.* 81. *Parte superiore* (carta 1 *recto*, lin. 1 — carta 22 *recto*, lin. 20);
8. Biblioteca Magliabechiana di Firenze, cod ice contrassegnato *Scaffale C.*, *Palchetto V*, *n.o* 18., *S. Marco* 216 (carta 80 *recto*, col. 1, lin. 28 — carta 86 *verso*, col. 2, lin. 34);
9. Ib. codice contrassegnato *Classe XI*, *n.o* 45 (carta 2 *recto*, lin. 1 — carta 5 *recto*, lin. 6) Frammento;
10. Biblioteca Vaticana di Roma, *Codice Vaticano* n.o 5733 (carta 275 *recto*, lin. 1 — carta 287 *recto*, lin. 26);
11. Ib. *Codice Urbinate*. *n.o* 1329 (carta 43 *recto*, lin. 1 — carta 63 *recto*, lin. 24).

questi non sono completi, e nessuno è anteriore al secolo decimoquarto: il nome del traduttore non vi è indicato. Roberto di Chester, del quale restano altri lavori, avrebbe voltato dall'arabo in latino il libro di Mohammed nell'anno 1183 per testimonianza di Adriano Van Roomen (chiamato latinamente *Adrianus Romanus*) che in una sua opera intitolata *In Mahumedis arabis Algebram Prolegomena* asserisce di possedere quella traduzione. Un esemplare stampato di quest'opera si conserva nella Biblioteca pubblica di Douai, e fu accennato dal sig. Chasles al principe Boncompagni in una lettera scrittagli a dì 5 settembre 1852 ove riportò alla pag. 81 del citato esemplare il seguente passo gentilmente comunicatomi dal signor Boncompagni: « Mahumed » filius Moysi, sicuti primus omnium invenit, ita & primus » omnium conscripsit Algebram lingvâ Arabicâ: qvo autem » tempore, mihi non constat. Opus veró ejus ex Arabico » in Latinum transtulit Robertus Cestrensis in civitate Se- » cobiensi anno 1183, est in Bibliothecâ meâ manuscriptum » ex liberalitate D. Thaddaei Hageccii. Titulus libri est, Inci- » pit Liber restaurationis & oppositionis numerorum. &c. » (1) Non vedendosi onde il Van Roomen abbia potuto trarre le citate notizie convien pensare che il manoscritto stesso le contenesse e che però la presente versione sia diversa dalla volgata la quale non ha data nè come si disse nome d'autore. Ad ogni modo pare che l'Algebra di Mohammed ben Musa restasse ignorata in Occidente nè secoli XII e XIII (2), e ch'egli vi avesse rinomanza soltanto pel suo trattato d'aritmetica il quale fosse noto per fama se non per traduzioni popolarmente diffuse: onde si giungesse perfino a prendere il suo nome d'algorismo nel significato speciale di *calcolo decimale*, o anche nel generico di *metodo calcolatorio* quale gli sembra

(1) *In Mahvmedis Arabis Algebram prolegomena*, pag. 8, lin. 3—6.
(1) Cossali, *Origine ecc. dell'Algebra*, Vol. I, pag. 188—489.

attribuito nella prefazione del *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano.

In questo trattato i caratteri che rappresentano i primi nove numeri sono chiamate *litere* ovvero *note*, e vi si avverte una diversità *inter homines* nel figurare taluni di essi « fit autem hec diversitas in figura quinte litere et sexte, septime quoque et octave » (pag. 1—2). A rappresentare lo zero adopera « circulum parvulum in similitudinem .0. litere » (p. 3); e di siffatti *circoli* fa puro uso scrivendo le frazioni sessagesimali per indicare i gradi, i minuti, o altre suddivisioni che mancano (p. 20 e 21), nel modo appunto che costumavano i greci ponendovi un *omicron.* (1). È notabile che si trovano lacune nel manoscritto dappertutto dove andrebbero ad essere delineate le cifre numeriche degl'Indiani o Arabi, il che sembra significare che il copiatore non ne avesse pratica e fosse inabile a riprodurle.

Intanto sarebbe provato che fin dal principio del nono secolo, e non solamente nella seconda metà del decimo come il sig. Woepcke dedusse da un manoscritto arabo della Bibl. Imp. di Parigi (2), gli Arabi usavano le cifre indiane e foggiavano lo zero a guisa d' un 0. Il che rimove una obbiezione proposta contro l' origine araba del nostro sistema numerale alla quale si opponeva che appo gli Arabi la figura 0 avea valor di cinque e un punto teneva luogo di zero (3).

Il secondo de' *trattati* della raccolta incominciata dal Boncompagni è un « Liber alghoarismi de pratica arismetrice qui editus est a magistro Iohanne yspalensi ». Questo Giovanni da Siviglia visse nella prima metà del secolo XII, poichè Amable Jourdain ha dimostrato ch'egli dedicò una

---

(1) Peacock, *Arithmetic*, articolo 39.
(2) *Annali di sc. mat. e fis.* T. VI. pag. 321.
(3) V. Peacock, *Arithmetic*, art. 86.

sua traduzione ad un Raimondo che fu Arcivescovo di Toledo dal 1130 circa fino al 1150 (1). Il trattato presente è tolto dal Codice contrassegnato *Ancien Fonds*, n. 7359, della Biblioteca Imperiale di Parigi: ha moltissima conformità coll'antecedente per la materia e per l'ordine e spesso anche per le parole, ma la sposizione è più ampia; quasi direbbesi che questo offre una versione compiuta dell'originale trattato di Mohammed Algorismi di cui l'altro è un estratto. Qui pure è indicata la varietà delle figure d'alcuni numeri (p. 28), e si fa uso d'un *circolo* per lo zero (p. 28-29), anche rispetto alle frazioni sessagesimali (p. 54-55). Notiamo che *circolo* è uno de' nomi dello zero annoverati dal Sacrobosco (2): « decima vero figura dicitur theta vel cifra vel figura nichili ».

D'altre due pubblicazioni che dobbiamo allo stesso Boncompagni ci contenteremo per ora di riferire i titoli: la loro importanza ci determinarà forse ad occuparcene ampiamente altra volta:

I. Scritti inediti del Padre Don Pietro Cossali Chierico Regolare Teatino pubblicati da Baldassarre Boncompagni seguiti da una Appendice contenente quattro lettere dirette al medesimo P. Cossali. Roma, Tipografia delle Belle Arti, Piazza Poli N.° 91, 1857.

II. Scritti di Leonardo Pisano Matematico del secolo decimoterzo pubblicati da Baldassarre Boncompagni — Volume I.- Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano pubblicato secondo la lezione del Codice Magliabechiano C. I, 2216 *badia Fiorentina* n.° 73, da Baldassarre Boncompagni. Roma, Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche Via Lata num.° 211, MDCCCLVII.

A. Genocchi.

---

(1) *Recherches critiques sur l'âge et l'origine des traductions latines d'Aristote* ecc. Parigi 1843, pag. 114 e 115.

(2) V. Raccolta già citata fol. xlv, *recto*.

INDICE DEGLI ARTICOLI



ELENCO DELLE TAVOLE

TAVOLA DELLE MATERIE

CONTENUTE NEGLI OTTO VOLUMI DI QUESTI ANNALI, SEGUITA DA UNA TAVOLA GENERALE PER NOMI DI AUTORI.

ANNI 1850, 1851, 1852, 1853, 1854
1855, 1856, 1857.

TOMO I. (Anno 1850).

TOMO II, (Anno 1851)

TOMO III, (Anno 1852).

TOMO IV. (Anno 1853).

TOMO V. (Anno 1854).

TOMO VI. (Anno 1855).

TOMO VII. (Anno 1856).

TOMO VIII. (Anno 1857.)

TAVOLA DELLE MATERIE

DISTRIBUITE SECONDO

I NOMI DEGLI AUTORI

A

B

C

D

F

G

H

I

L

M

N

O

P

R

S

T

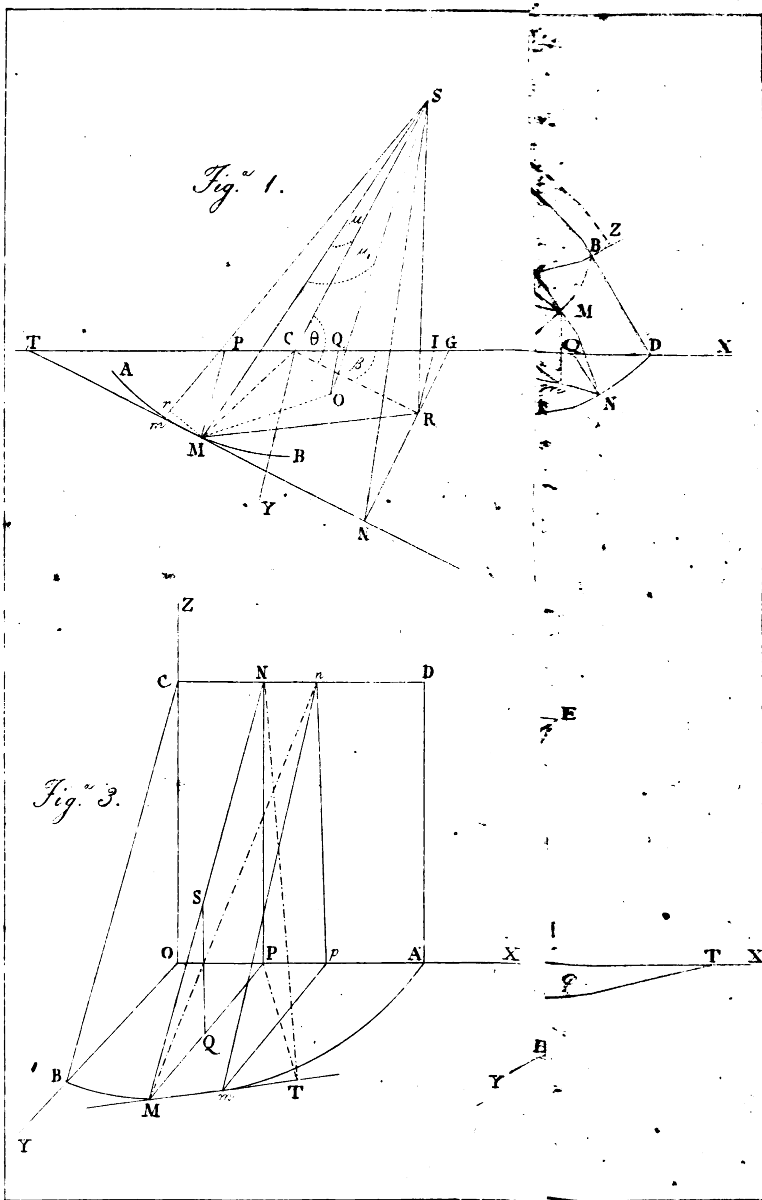
V

IMPRIMATUR

Fr. Th. M. Larco Ord. Praed. S. P. Ap. Mag. Socius

IMPRIMATUR

Fr. Ant. Ligi Archiep. Icon. Vicesgerens


Fig.a 1.
S
μ
μ1
T
P
C
θ
Q
I
G
D
X
A
r
m
M
B
β
O
R
Y
N
Z
Fig.a 3.
Z
C
N
n
D
S
O
P
p
A
X
Q
B
M
m
T
Y
E
T
X
Y

